

ループ構造をもつシステムのアベイラビリティ解析

松岡 猛†

† 宇都宮大学大学院工学研究科 〒321-8585 宇都宮市陽東 7-1-2

E-mail: † mats@cc.utsunomiya-u.ac.jp

あらまし 論理ループ構造を持ったシステムは従来ブール代数の代数的演算では解けなかった。未知要素を持ったブール代数方程式を解こうとすると未知要素が繰り返し現れてしまう困難に出会ってきた。本論文ではループ構造を持つシステムのアベイラビリティ解析を一般化された条件下で実施する方法を提案している。ブール代数方程式の解法についての証明を与え、次にループ運転状態事象の算出手順を示し、最後に基本ループ構造についての解析結果を示した。

キーワード ループ構造, ブール代数方程式, 信頼性解析, アベイラビリティ解析

Availability analysis of a system with loop structures

Takeshi MATSUOKA †

† Graduate school of Engineering, Utsunomiya University, 7-1-2 Yoto, Utsunomiya City, Tochigi, 321-8585 Japan

E-mail: † mats@cc.utsunomiya-u.ac.jp

Abstract A system which has logical loop(s) was not generally solved in terms of the arithmetic operators of Boolean algebra. It appears infinite circulation of the unknown variables in the process of solving Boolean equation. In the present paper, a generalized procedure is proposed for systems with logical loop(s). The proof of the solution for Boolean equation with unknown variable is given in a simplified formulation. The procedure is given for identifying operating states of loop structure and analysis results are shown for fundamental loop structure.

Keyword Loop structure, Boolean algebraic equation, Reliability analysis, Availability analysis

1. 序論

システムの信頼度はシステム中に置かれた機器・サブシステムの状態・機能間のつながりのブール代数式で表現することが可能である。もし、システム中に論理ループが含まれる場合は、このブール代数式が未知ブール代数要素を含んだ形式として表現されることとなる。未知ブール代数要素の数は基本的にはシステム中の論理ループ数と一致する。

この未知ブール代数要素を含んだブール代数方程式を解こうとすると、未知ブール代数要素が再帰的に無限に出てくるという困難に出会う。信頼性工学者はこのことに長年苦しんできており、論理ループを代数的演算で一般的に解くことはできていなかった。そのため、各種の近似的手法[1]~[5]が提案されてきた。

この未知ブール代数要素を含んだ連立ブール代数方程式の解法を信頼性工学へ応用する試みが著者により提案された[6]。そこでは、単一のループ構造が存在する場合の解法が示された。また、複雑なシステム体系については論理ループを構成する機器が一斉に起動された場合には容易に解けることも示された。

本論文では、論理ループ構造を持ったシステムについて、一般化した条件下での解析方法の提案を行う。

2. 未知要素を含んだブール代数法的式の解法

論理ループ構造を含んだシステムの信頼度をブール代数式で表現すると未知のブール代数要素が再帰的に現れる式となる。

$$x = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cdot x + g(\alpha_1, \dots, \alpha_n). \quad (1)$$

ここで、 α_i は既知のブール代数要素、 x は未知のブール代数要素を表す。

ブール代数における $G=H$ の関係は、次の表現と等価である。

$$G\bar{H} + \bar{G}H = 0. \quad (2)$$

ここで、 \bar{G} は G の補集合を表す。この表現により(1)式は次の様に変形される。

$$x(\bar{f} + \bar{x})\bar{g} + \bar{x}(fx + g) = 0. \quad (3)$$

(3)式の括弧をはずし整理すると、

$$x \cdot \bar{f} \cdot \bar{g} + \bar{x} \cdot g = 0. \quad (4)$$

となる。ブール代数の定理[7]によると、ブール式

$x\bar{A} + \bar{x}B = 0$ は、 $AB=0$ が解を持つ場合に解を持ち、その解は $x = m \cdot \bar{A} + B$ となる。ここで、 m は任意のブール代数要素である。

(4)式の場合 $AB=0$ は $\bar{f} \cdot \bar{g} \cdot g = 0$ に相当しており、恒等式として満足されている。それ故、(1)式の解は、

$$x = m \cdot f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + g(\alpha_1, \dots, \alpha_n). \quad (5)$$

と得られる。項 f を複数の項に分解して考えると、

$$x = \{f_1 + f_2 + \dots + f_k\}x + g, \quad (6)$$

となり、(6)式の解は、

$$x = m_1 f_1 + m_2 f_2 + \dots + m_k f_k + g. \quad (7)$$

となる。未知の要素 x は α_i 、 m_i により表現されることとなり、解が得られる。

システム中に論理ループが複数存在するときは複数の未知ブール代数要素を用いた連立ブール代数方程式によりシステムの論理構造が表現される。

(5)式の関係を用いると、この連立ブール代数方程式も同様に解ける。

3. ループ運転状態の形成

図1に示すループ構造を含んだ系について検討を進めていく。

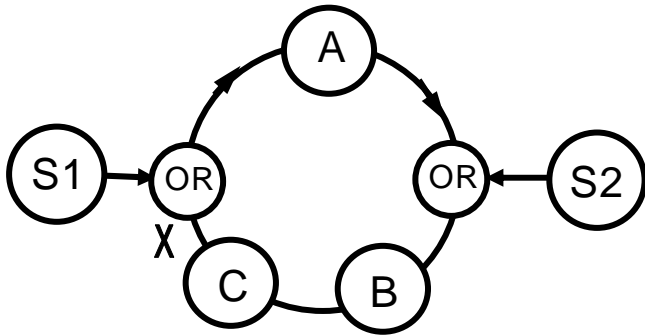


図1 ループ構造を持った系

図1において、機器 S1、S2 は SS-type で機器 A、B、C は G-type であるとする。初期状態として待機状態に置かれたループ構造は、そのままでは決して運転を開始することはできない。それ故、SS-type 機器からの支援によりループの運転状態が成立する状況を図1の場合について検討し、どの様にループ運転状態が成立するか見ていく。

機器 S1, S2, A, B, C の起動機会は各1回とし、その時刻をそれぞれ $t1$ 、 $t1$ 、 $t3$ 、 $t2$ 、 $t4$ とする。

以下時間進展とともに順次機器の運転状態事象を求めていく。

$$t=t1; \quad S1_o(t1), \quad S2_o(t1) \quad (8)$$

$$t=t2; \quad B_o(t2) = S2_o(t2)S_B(t2-t_0) \cdot \sigma_{B,t2} \cdot D_{B,t2} = S2_o(t2)B^1(t2). \quad (9)$$

$$t=t3; \quad A_o(t3) = S1_o(t3)S_A(t3-t_0) \cdot \sigma_{A,t3} \cdot D_{A,t3} = S1_o(t3)A^1(t3). \quad (10)$$

ここで、既に運転状態になっている機器 B へ機器 A からの追加の支援が加わるので“Takeover”の関係が成り立つ。従って、

$$B_o(t3) = S2_o(t3)B^1(t3) + S1_o(t3)A^1(t3)S2_o(t3)B^1(t3). \quad (11)$$

となり、 $t=t3$ で機器 B に新たな起動指令がなくても追加の運転状態事象（第2項）が生成される。時刻 $t4$ に

おける機器 C への支援は $B_o(t4)$ であることを考慮すると、機器 C へ起動指令が与えられることにより、次式の様になる。

$$t=t4; \quad C_o(t4) = B_o(t4)C^1(t4)$$

$$= S2_o(t4)B^1(t4)C^1(t4) + S1_o(t4)S2_o(t3)A^1(t4)B^1(t4)C^1(t4). \quad (12)$$

この時点で、機器 C の出力が機器 A への入力（支援）となりループが形成される。機器 C の支援による機器 A の運転状態事象は“Takeover”の関係により決定できる。つまり、既に運転状態にある機器 A へあとから起動した機器 C による支援で次の事象が追加される。

$$\begin{aligned} C_o(t4)S1_o(t4)A^1(t4) &= S1_o(t4)S2_o(t4)A^1(t4)B^1(t4)C^1(t4) \\ &\quad + S1_o(t4)S2_o(t3)A^1(t4)B^1(t4)C^1(t4) \\ &= S1_o(t4)S2_o(t3)A^1(t4)B^1(t4)C^1(t4). \quad (13) \end{aligned}$$

(13)式の事象では、動作機器は A, B, C のみでありループ運転状態事象であることがわかる。ループ運転事象はループを構成する各機器の動作事象とループ形成時に関与した“Takeover factor”の積となっている。

時刻 $t4$ 以降における各機器の運転状態事象を具体的に記すると以下の様になっている。

$$A_o(t) = S1_o(t)A^1(t) + S1_o(t4)S2_o(t3)A^1(t)B^1(t)C^1(t). \quad (14)$$

$$\begin{aligned} B_o(t) &= S1_o(t)S2_o(t3)A^1(t)B^1(t) + S2_o(t)B^1(t) \\ &\quad + S1_o(t4)S2_o(t3)A^1(t)B^1(t)C^1(t). \quad (15) \end{aligned}$$

$$C_o(t) = S2_o(t)B^1(t)C^1(t) + S1_o(t4)S2_o(t3)A^1(t)B^1(t)C^1(t). \quad (16)$$

4. ループ運転状態の持つ性質

前節で得られたループ運転状態についてその主要な性質を述べる[8]。

まず、ループを構成する各機器のループ運転状態事象はすべて同一である ($S1_o(t4)S2_o(t3)A^1(t)B^1(t)C^1(t)$)。

一度ループ運転が実現するとループ外からの支援を切り離してもループ運転には何らの影響も及ぼさない。図1においては S1、S2 をループ運転形成後停止してもループ運転の信頼度には影響を及ぼさない。

逆に、ループ運転形成後外部から新たな支援を加えても何らの効果もない。

5. ブール代数式を用いたループ構造の解法

図1のシステムについて機器 C の出力事象を X と置き各機器の運転状態事象間の関係をブール代数式で表現すると次式となる。

$$X = ((S1 + X) \cdot A + S2) \cdot B \cdot C \quad (17)$$

展開して、

$$X = S1 \cdot A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot C \cdot X + S2 \cdot B \cdot C \quad (18)$$

が得られるが、この解は(5)式から

$$X = S1 \cdot A \cdot B \cdot C + mA \cdot B \cdot C + S2 \cdot B \cdot C \quad (19)$$

と得られる。第2項がループ運転状態事象を表す項になっている。

各機器の運転状態事象は(14),(15),(16)式と具体的に

与えられているので、これを代入して展開・整理すると、

$$S1 \cdot A \cdot B \cdot C = S1_o(t)S2_o(\tau3)A^1(t)B^1(t)C^1(t). \quad (20)$$

$$mA \cdot B \cdot C = mS1_o(\tau4)S2_o(\tau3)A^1(t)B^1(t)C^1(t). \quad (21)$$

$$S2 \cdot B \cdot C = S2_o(t)B^1(t)C^1(t). \quad (22)$$

と具体的な表現が得られる。

第2項、(21)式で与えられるループ運転状態事象は(13)式と同一となるため、(5)式における任意ブール代数要素 m は1 (ユニバーサル事象) と置けば良いことがわかる[9]。従って、(20)式の項は(21)式の部分事象となってしまう。(22)式はS2を支援源とする非ループ構造の運転状態事象であることがわかる。

(19)式から運転状態事象の具体的な表現を求める際、非ループ構造の運転状態事象の項はSS-type から出発した支援関係となっており容易に算出可能である。

ループ構造の運転状態事象は、ループ構造中で最初に起動機会が与えられている機器から出発し順次機器の接続順に運転状態事象を算出し一巡させる。その際、ループ構造であるため、必ず“Takeover”現象を考慮する必要がある。

ループ構造中の1番目の機器起動時にはループは形成されておらず、その機器の運転状態事象は、その時刻における非ループ構造の連鎖で決定できる。

6. 複数の起動機会がある場合の取り扱い

前節では各機器に起動機会が一回のみ与えられた場合について検討し基本的な取り扱い方法を明らかにした。本節では各機器に複数の起動機会がある一般的な場合における取り扱い方法を示す。

各機器の起動機会として表1を考える。

表1 起動機会時刻

Time	S1	A	S2	B	C
t0					
t1	◆		◆		
t2				◆	
t3		◆			
t4				◆	
t5	◆		◆		
t6					◆
t7				◆	
t8		◆	◆		
t9					◆

システムの運転状態は(17)式で表現されている。

$$X = ((S1 + X) \cdot A + S2) \cdot B \cdot C \quad (17)$$

各機器は複数の起動機会を持っているので、各時刻で運転を開始した事象毎に分解した次式等の関係を(17)

式に代入する。

$$S1 = S1^1 + S1^2 \quad (23)$$

$$X = (S1^1 + S2^2)(A^1 + A^2)(B^1 + B^2 + B^3)(C^1 + C^2) + (A^1 + A^2)(B^1 + B^2 + B^3)(C^1 + C^2)X + (S2^1 + S2^2 + S2^3)(B^1 + B^2 + B^3)(C^1 + C^2). \quad (24)$$

上の式を展開すると、第1項、第3項から非ループ構造の連鎖により運転状態になる可能性のある全ての組み合わせがあらわれてくる。

例えば、 $S1^1 \cdot A^1 \cdot B^1 \cdot C^1$ の項はSS-type 機器S1が時刻 $t1$ での一回目の起動により運転状態となった事象からの支援連鎖である。A-B間で“Takeover”現象が現れることを考慮すると次式の様になる。

$$S1^1 \cdot A^1 \cdot B^1 \cdot C^1 = S1_o^1(t)A^1(t)S2_o^2(\tau3)B^1(t)C^1(t) \quad (25)$$

他の項も同様にして具体的な表現が算出できる。

$$\begin{aligned} & \text{第2項からは(5)式の関係と } m=1 \text{ であることより、} \\ & (A^1 + A^2)(B^1 + B^2 + B^3)(C^1 + C^2) \\ & = A^1B^1C^1 + A^1B^1C^2 + A^1B^2C^1 + A^1B^2C^2 + A^1B^3C^1 + A^1B^3C^2 \\ & \quad + A^2B^1C^1 + A^2B^1C^2 + A^2B^2C^1 + A^2B^2C^2 + A^2B^3C^1 + A^2B^3C^2. \end{aligned} \quad (26)$$

とループ運転を形成する可能性のある連鎖が12項出てくる。ここで、 $A_o^i(t) \cdot A_o^j(t) = \phi; (i \neq j)$ の関係があるため、各ループ運転状態は互いに独立であり個々の項単独で検討を進めていくことができる。

例えば $A^1 \cdot B^1 \cdot C^1$ についてループ運転状態事象を求めてみる。 B^1 が最初に起動されるのでその時の運転状態事象から出発し、支援関係および“Takeover”現象を考慮して順次各機器の運転状態事象を算出していく。

$$B_o^1(t2) = S2_o^2(t2) \cdot B^1(t2)$$

$$A_o^1(t3) = S1_o^1(t3) \cdot A^1(t3)$$

$$B_o^1(t3) = S2_o^2(t3) \cdot B^1(t3)$$

$$+ S1_o^1(t3) \cdot S2_o^2(\tau3) \cdot A^1(t3) \cdot B^1(t3)$$

$$C_o^1(t6) = S2_o^2(t6) \cdot B^1(t6) \cdot C^1(t6)$$

$$+ S1_o^1(t6) \cdot S2_o^2(\tau3) \cdot A^1(t6) \cdot B^1(t6) \cdot C^1(t6)$$

機器Cには $B_o^2(t3)$ の支援のもとに起動する事象もあるが、項 $A^1 \cdot B^1 \cdot C^1$ と重なり会わない事象であるため、ここでは考慮の必要がない。

$$A_o^1(t6) = S1_o^1(t6) \cdot A^1(t6)$$

$$+ S1_o^1(\tau6)S2_o^2(t6) \cdot A^1(t6) \cdot B^1(t6) \cdot C^1(t6)$$

$$+ S1_o^1(\tau6) \cdot S2_o^2(\tau3) \cdot A^1(t6) \cdot B^1(t6) \cdot C^1(t6)$$

$$= S1_o^1(t6) \cdot A^1(t6)$$

$$+ S1_o^1(\tau6) \cdot S2_o^2(\tau3) \cdot A^1(t6) \cdot B^1(t6) \cdot C^1(t6)$$

$$B_o^1(t6) = S2_o^2(t6) \cdot B^1(t6)$$

$$+ S1_o^1(t6) \cdot S2_o^2(\tau3) \cdot A^1(t6) \cdot B^1(t6)$$

$$+ S1_o^1(\tau6) \cdot S2_o^2(\tau3) \cdot A^1(t6) \cdot B^1(t6) \cdot C^1(t6)$$

$B_o^1(t6)$ 算出の際には、新たに入力する事象が $S1_o^1(\tau6) \cdot S2_o^2(\tau3) \cdot A^1(t) \cdot B^1(t) \cdot C^1(t)$ である事による“Takeover”の現象を考慮して追加事象を得ている。

一巡した機器 B_o^1 の運転状態の中にループ運転状態

事象 $(S1_o^1(\tau6) \cdot S2_o^1(\tau3) \cdot A^1(t) \cdot B^1(t) \cdot C^1(t))$ が現れている。

項 $A^1 \cdot B^3 \cdot C^1$ について同様に検討してみる。

$$A_o^1(t3) = S1_o^1(t3) \cdot A^1(t3)$$

$$B_o^3(t7) = S1_o^1(t7)A^1(t7)$$

$$\left(\begin{array}{l} S2_o^1(\tau2) \\ +S2_o^1(\tau2)S2_o^1(\tau4)\overline{\sigma_{B,t2} \cdot D_{B,t2}} \\ +S2_o^1(\tau4) \cdot \overline{\sigma_{B,t2} D_{B,t2}} \cdot \overline{\sigma_{B,t4} D_{B,t4}} \end{array} \right) \cdot B^3(t7).$$

$B^3 \Rightarrow C^1$ の接続において C^1 は既に起動している。

$$\begin{aligned} C_o^1(t6) &= S2_o^1(t6) \cdot B^1(t6) \cdot C^1(t6) \\ &+ S1_o^1(t6) \cdot S2_o^1(\tau3) \cdot A^1(t6) \cdot B^1(t6) \cdot C^1(t6) \\ &+ S2_o^1(t6) \overline{\sigma_{B,t2} \cdot D_{B,t2}} \cdot B^2(t6)C^1(t6). \end{aligned}$$

これらはいずれも B^1, B^2 の支援による運転状態である。従って $B^3 \Rightarrow C^1$ の“Takeover”現象による接続は実現できず、この項であらわされる組み合わせのループ運転状態は存在しない。

最終的にループ運転状態事象は次の 10 項となる。

$$S1_o^1(\tau6)S2_o^1(\tau3)A^1(t)B^1(t)C^1(t)$$

$$S1_o^1(\tau6) \left(S2_o^1(\tau2) + S2_o^1(\tau2) \overline{\sigma_{B,t2} \cdot D_{B,t2}} \right) A^1(t)B^2(t)C^1(t)$$

$$S2_o^1(\tau8) \left(S1_o^1(\tau3) + S1_o^1(\tau3) \overline{\sigma_{A,t3} \cdot D_{A,t3}} \right) \cdot A^2(t)B^1(t)C^1(t)$$

$$S2_o^1(\tau8) \cdot \left(S1_o^1(\tau3) + S1_o^1(\tau3) \overline{\sigma_{A,t3} \cdot D_{A,t3}} \right) \cdot \overline{\sigma_{B,t2} \cdot D_{B,t2}} \cdot A^2(t)B^2(t)C^1(t)$$

$$S1_o^1(\tau9)S2_o^1(\tau3) \overline{\sigma_{C,t6} \cdot D_{C,t6}} \cdot A^1(t)B^1(t)C^2(t)$$

$$\left\{ S1_o^1(\tau9) \cdot S2_o^1(\tau8) \overline{\sigma_{A,t3} \cdot D_{A,t3}} + S1_o^1(\tau9) \cdot S2_o^1(\tau8) \right\} \cdot \overline{\sigma_{C,t6} \cdot D_{C,t6}} \cdot A^2(t)B^1(t)C^2(t)$$

$$S1_o^1(\tau9) \left(S2_o^1(\tau2) + S2_o^1(\tau2) \overline{\sigma_{B,t2} \cdot D_{B,t2}} + S2_o^1(\tau9) + S2_o^3(\tau9) \right) \cdot \overline{\sigma_{C,t6} \cdot D_{C,t6}} \cdot A^1(t)B^2(t)C^2(t)$$

$$S2_o^1(\tau8) \cdot \left\{ S1_o^1(\tau9) \cdot \overline{\sigma_{A,t3} \cdot D_{A,t3}} + S1_o^1(\tau9) \right\} \cdot \overline{\sigma_{B,t2} \cdot D_{B,t2}} \cdot \overline{\sigma_{C,t6} \cdot D_{C,t6}} \cdot A^2(t) \cdot B^2(t)C^2(t)$$

$$S1_o^1(\tau9) \left(S2_o^1(\tau2) + S2_o^1(\tau2) \overline{\sigma_{B,t2} \cdot D_{B,t2}} + S2_o^1(\tau9) + S2_o^3(\tau9) \right) \cdot \overline{\sigma_{B,t4} \cdot D_{B,t4}} \cdot A^1(t) \cdot B^3(t) \cdot C^2(t)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S1_o^1(\tau9) \cdot S2_o^1(\tau8) \overline{\sigma_{A,t3} \cdot D_{A,t3}} \cdot \overline{\sigma_{B,t2} D_{B,t2}} \cdot \overline{\sigma_{B,t4} D_{B,t4}} \\ + S1_o^1(\tau9) \cdot S2_o^2(\tau8) \overline{\sigma_{A,t3} \cdot D_{A,t3}} \\ + S1_o^1(\tau9) \cdot S2_o^1(\tau8) \cdot \overline{\sigma_{B,t2} D_{B,t2}} \cdot \overline{\sigma_{B,t4} D_{B,t4}} + S1_o^1(\tau9) \cdot S2_o^2(\tau8) \end{array} \right\} \cdot A^2(t) \cdot B^3(t) \cdot C^2(t)$$

7. シミュレーション解析

本論文で提案したブール代数式を用いた解法の妥当性を検討するため、エクセルを用いたシミュレーション解析を実施し比較した[8]。シミュレーション対象としては二重のループを持った発電システムを選び、厳密解析とシミュレーション解析とでパラメータの数値を同一とした。

解析は乱数を用いたモンテカルロシミュレーションを基本とし、サンプリング回数としては 10000 回程度を実施した。

ループ構造を持ったシステムのアベイラビリティがシミュレーションでも解けることが示されたとともに解析解とシミュレーション解との良好な一致が見られ、相互に妥当な解析を実施していることが確認できた。

8. 結論

本論文では、論理ループを含んだシステムの信頼度・アベイラビリティを一般的な条件下で求める方法を提案した。

システム状態をブール代数方程式で表現し、未知ブール代数要素を含んだ式の解法を用いループ運転状態事象を求める方法である。

本論文で提案した論理ループの解析方法により、ループ構造を含んだ各種大規模複雑システムの信頼度・アベイラビリティが厳密に解ける事となり、既存システムの再評価、効果的・効率的な設計等が可能となった。

文献

- [1] G.A.Coles, T.B.Powers, "Breaking the logic loop to complete the probabilistic risk assessment", Proc. International topical meeting on probability, reliability and safety assessment: PSA'89, Pittsburgh, U.S.A., 1989, pp.1155-1160.
- [2] T. Matsuoka, "A method to solve logical loops in the GO-FLOW Methodology", Proc. PSAM-V: International Conf. on probabilistic safety assessment and management, Osaka, Japan, 2000, pp.1461-1465.
- [3] J.E.Yang, S.H.Han, J.H.Park, Y.H.Jin, "Analytic method to break logical loops automatically in PSA", Reliability Engineering And System Safety, vol.56, pp.101-105,1997.
- [4] J.K.Vaurio, "A recursive method for breaking complex logic loops in Boolean system models", Reliability Engineering And System Safety, vol.92, pp.1473-1475,2007.
- [5] H.G.Lim, S.C.Jang, "An analytic solution for a fault tree with circular logics in which the systems are linearly interrelated", Reliability Engineering And System Safety, vol.92, pp.804-807, 2007.
- [6] T.Matsuoka, "An exact method for solving logical loops in reliability analysis", Reliability Engineering And System Safety, vol.94, pp. 1282-1288, 2009.
- [7] S.Even, "Sequential Boolean equations, Appendix; solution of Boolean equations", IEEE transactions on computers, Vol.C-18, pp.230-240, 1969.
- [8] 松岡猛, “ブール代数方程式による論理ループ構造の信頼性解析”, 日本信頼性学会誌 Vol.32, no.5, pp.377-395, July 2010.
- [9] T.Matsuoka, "Analysis of Logical Loops in Boolean System Models", Proc. PSAM-10: International conference on probabilistic safety assessment and management, Seattle, U.S.A., May,2010.