

## ブール代数方程式による論理ループ構造の信頼性解析

松岡 猛\*

Reliability Analysis of Logical Loop Structure  
by using Algebraic Solution of Boolean Equation

Takeshi MATSUOKA\*

**要旨：** 論理ループ構造を持ったシステムは従来ブール代数の代数的演算では解けなかった。未知要素を持ったブール代数方程式を解こうとすると未知要素が繰り返し現れてしまう困難に出会ってきた。しかし、最近この未知要素を持ったブール代数方程式を限定された条件下で厳密に解く方法が提案された。本論文ではより一般化された条件下で解く方法を提案している。まず、ブール代数方程式の解法についての証明を与え、次に基本的ループ構造の時間的挙動について検討し、解に付随する任意要素と現実の工学システムとの関連を示した。これにより、ブール代数方程式を用いて論理ループ構造を持ったシステムの信頼性解析が実施できるようになった。最後に、サンプルシステムについての解析実施例を示し、シミュレーション結果との比較を行なった。

**キーワード：** 論理ループ, ブール代数方程式, 信頼性工学, 代数演算的解法

**Abstract:** A system which has logical loop(s) was not generally solved in terms of the arithmetic operators of Boolean algebra. It appears infinite circulation of the unknown variables in the process of solving simultaneous Boolean equations. An exact method has been proposed for solving this problem in reliability analysis, but it was effective only in a restricted analysis condition. In the present paper, a generalized procedure is proposed for systems with logical loop(s). The proof of the solution for simultaneous Boolean equations is given in a simplified formulation. Discussions are made for time-dependent behavior of system operation to fundamental loop structures. It is shown the relation between operating condition of a loop structure and indefinite constants appeared in the solution of simultaneous Boolean equations. With this relation, it becomes possible to accurately evaluate the reliability of logical loops by the aid of algebraic solution of Boolean equations. Detailed explanation of this analysis procedure is given for an example system.

**Keywords:** Logical loop, Simultaneous Boolean equations, Reliability engineering, Algebraic solution

## 1 はじめに

信頼性工学の主要な課題はシステムの信頼度評価にある。システムの信頼度はシステム中に置かれた機器・サブシステムの状態・機能間のつながりのブール代数式で表現することが可能である。もし、システム中に論理ループが含まれる場合は、このブール代数式が未知ブール代数要素を含んだ形式として表現されることとなる。未知ブール代数要素の数は基本的にはシステム中の論理ループ数と一致する。この未知ブール代数要素を含んだブール代数方程

式を解こうとすると、未知ブール代数要素が再帰的に無限に出てくるという困難に出会う。信頼性工学者はこのことに長年苦しんできており、論理ループを代数的演算で一般的に解くことはできていなかった。そのため、各種の近似的手法[1]~[5]が提案されてきた。しかし、コンピュータ工学の分野では連立ブール代数方程式は原理的には代数的演算で解けることが示されており、その解はやや複雑な表現形式で提示されていた[6]。さらに、その解には任意要素が伴っていたため、利用価値の面からは注目を集めてはいなかった。

\* 宇都宮大学大学院工学研究科機械知能工学専攻

〒321-8585 栃木県宇都宮市陽東 7-1-2

mats@cc.utsunomiya-u.ac.jp

この未知ブール代数要素を含んだ連立ブール代数方程式の解法を信頼性工学へ応用する試みが提案された[7]。そこでは、単一のループ構造が存在する場合の解法が示された。また、複雑なシステム体系については論理ループを構成する機器が一斉に起動された場合には容易に解けることも示された。

本論文では、論理ループ構造を持ったシステムの時間経過にもなる状態推移について検討し、より一般化した条件下での解析方法の提案を行う。

## 2 未知要素を含んだブール代数方程式の解法

論理ループ構造を含んだシステムの信頼度をブール代数式で表現すると未知のブール代数要素が再帰的に現れる式となる。

$$x = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cdot x + g(\alpha_1, \dots, \alpha_n). \quad (1)$$

ここで、 $\alpha_i$  は既知のブール代数要素、 $x$  は未知のブール代数要素を表す。

ブール代数における  $G=H$  の関係は、次の表現と等価である。

$$G\bar{H} + \bar{G}H = 0. \quad (2)$$

ここで、 $\bar{G}$  は  $G$  の補集合を表す。この表現により(1)式は次の様に変形される。

$$x(\bar{f} + \bar{x})\bar{g} + \bar{x}(fx + g) = 0. \quad (3)$$

(3)式の括弧をはずし整理すると、

$$x \cdot \bar{f} \cdot \bar{g} + \bar{x} \cdot g = 0. \quad (4)$$

となる。ブール代数の定理[6]によると、ブール式  $xA + \bar{x}B = 0$  は、 $AB=0$  が解を持つ場合に解を持ち、その解は  $x = m \cdot \bar{A} + B$  となる。ここで、 $m$  は任意のブール代数要素である。

(4)式の場合  $AB=0$  は  $\bar{f} \cdot \bar{g} \cdot g = 0$  に相当しており、恒等式として満足されている。それ故、(1)式の解は、

$$x = m \cdot f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + g(\alpha_1, \dots, \alpha_n). \quad (5)$$

と得られる。項  $f$  を複数の項に分解して考えると、

$$x = \{f_1 + f_2 + \dots + f_k\}x + g, \quad (6)$$

となり、(6)式の解は、

$$x = m_1 f_1 + m_2 f_2 + \dots + m_k f_k + g. \quad (7)$$

となる。未知の要素  $x$  は  $\alpha_i, m_i$  により表現されることとなり、解が得られる。

システム中に論理ループが複数存在するときは複数の未知ブール代数要素を用いた連立ブール代数方程式によりシステムの論理構造が表現される。

$$x_i = f_i(\alpha_1, \dots, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) x_i + g_i(\alpha_1, \dots, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n); i=1 \sim n \quad (8)$$

(5)式の関係を用いると、この連立ブール代数方程式は以下の手順で解ける。まず、第1番目の式から始める。

$$x_1 = f_1(\alpha_1, \dots, x_2, \dots, x_n) x_1 + g_1(\alpha_1, \dots, x_2, \dots, x_n). \quad (9)$$

(9)式の解は、

$$x_1 = m_1 f_1(\alpha_1, \dots, x_2, \dots, x_n) + g_1(\alpha_1, \dots, x_2, \dots, x_n). \quad (10)$$

となる。これを一連の方程式の第2式以下の  $x_1$  に代入し整理し直すと、

$$x_j = f_j^{(1)}(\alpha_1, \dots, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n, m_1) x_j + g_j^{(1)}(\alpha_1, \dots, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n, m_1); j=2 \sim n. \quad (11)$$

となる。この手続きを繰り返すと、最後に

$$x_n = f_n^{(n-1)}(\alpha_1, \dots, m_1, \dots, m_{n-1}) x_n + g_n^{(n-1)}(\alpha_1, \dots, m_1, \dots, m_{n-1}). \quad (12)$$

となり、 $x_n$  が既知のブール代数要素  $\alpha_i$  と任意ブール代数要素  $m_i$  のみで表現できる。

$$x_n = m_n f_n^{(n-1)}(\alpha_1, \dots, m_1, \dots, m_{n-1}) + g_n^{(n-1)}(\alpha_1, \dots, m_1, \dots, m_{n-1}). \quad (13)$$

他の要素  $x_j$  についても同様の表現が必要な場合は順次逆に代入していくと求める事ができる。(7)式の表現の場合も同様な手順により未知ブール代数要素が求まる。

## 3 信頼性工学への応用

論理ループを含んだシステムの信頼度評価で出会ってきた未知ブール代数要素が再帰的に現れるという困難は、前章での解法を用いれば効果的に解決できそうである。しかし、前章で示したように、解には任意ブール代数要素が含まれている。そのため一組の連立ブール代数方程式の解としては、ほとんど無限個数の解が得られることになってしまう。このことが、連立ブール代数方程式は代数演算で原理的に解けるという事実に多くの注意が払われなかった理由である。

しかし、任意ブール代数要素が存在するという状況は、微分方程式を解いた場合不定定数が現れることと同じ状況であるといえる。微分方程式の場合は、境界条件あるいは初期条件により不定定数の値を決定している。

この連立ブール代数方程式の解法を信頼性工学に応用する際には、得られた解が現実の工学システムの状況を正しく反映するように任意ブール代数要素を決定すれば良い。

### 3.1 ループ構造解析の基本的考え方

一般にシステムは多数の機器から構成されてい

るがループ構造に着眼し、位相的に同一位置に存在する機器を一まとめにして考えると、単一のループ構造のみを含んだシステムは図1の信頼性ブロック線図として表現される。

この関係をブール代数式で表現すると、

$$\begin{aligned} X &= (A+CX)B, \\ X &= AB+BCX. \end{aligned} \quad (14)$$

となり、(5)式の規則により、

$$X = AB + mBC. \quad (15)$$

と解が求まる。ここで  $m$  は任意ブール代数要素である。

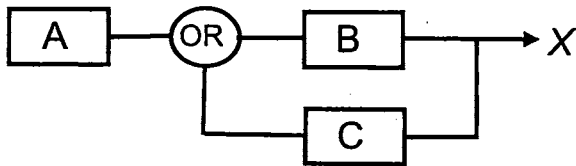


図1 ループ構造のブロック線図

第1項  $AB$  は A ブロック、B ブロックの積による信頼度で、非ループ構造からの寄与分。  $mBC$  は要素  $A$  を含まない項で、自立した動作をしているループ構造からの寄与分。この段階では、各ブロックの信頼度の関係が記述されていることになり、 $X$  は、一般にこのシステムの信頼度を表している。

工学的システムにおけるループ構造は、システム内で生成した出力をフィードバックして再度入力として使用し自立した運転状態を維持するために用いられている。そのため、ループ構造の特性を解析・評価するためには各ブロック A, B, C の運転状態事象に着目し検討を進める必要がある。入出力関係を明確にするため図1のブロック線図を図2の有向線を用いた表記に書き換える。

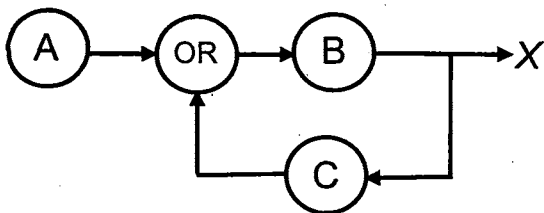


図2 入出力関係を考慮したループ構造

ブロック A には入力線が与えられていないので運転状態維持のために他からの支援を必要としない特性を持っている。これに対してブロック B, C は運転状態維持に他からの支援を必要としている。

非ループ構造からの寄与分  $AB$  を A の運転状態事

象と B の運転状態事象との積事象と考え、システム全体の運転状態への寄与分とする。その際、B の運転には、A もしくは C からの入力が必要であるという条件を考慮する必要がある。ループ構造からの寄与分  $mBC$  においても、B, C の運転には B, C それぞれへの入力が必要となる。

図2の構造からわかる様に、B, C がひとたび運転状態になれば、A からの入力なしに運転状態が継続できる。しかし、A の存在がない場合には、初期に待機状態に置かれた B, C が運転状態に移行することは出来ない。それ故、通常の工学システムで行なわれている A からの支援で B, C の運転を開始しループ構造を形成する過程を考慮する必要がある。

3.5 節以降で示すように、ループ構造については、ループ運転成立時におけるループへの入力事象 (A の出力事象) を  $m$  と設定すれば良いことがわかる。

( $m$  決定の規則)

従って、ループ構造の解析には、機器の運転状態の時間推移を考える必要がある。また、運転継続に他機器からの支援を必要とする機器については、その条件を組み込んだ運転状態の表現方法を明確にする必要がある。以下、この方針の下に検討を進める。

### 3.2 表記法の説明

時間依存を考慮した機器の運転状態を扱うため以下の表記法を準備する。

機器 A が時刻  $t$  において待機中で健全である事象を  $S_A(t)$  とする。  $S_A(t)$  は時間経過とともに単調に減少する (部分事象となる) 連続性を持った事象とする。事象  $S_A(t)$  の発生確率  $\Pr(S_A(t))$  は一例として次式の様に表示される。

$$\Pr(S_A(t)) = S_{A0} \exp\{-\lambda_{A,S}t\}. \quad (16)$$

ここで、  $S_{A0}$  は初期に健全である確率、  $\lambda_{A,S}$  は機器 A の待機中の故障率で一定値としている。

次に、起動指令が与えられ運転状態へ推移する場合を考える。起動指令事象を  $\sigma_{A,I}$ 、起動指令が与えられた時正常に運転開始する事象を  $D_{A,I}$ 、運転開始後の運転中の健全性推移事象を  $O_A(t)$  とする。  $O_A(t)$  も時間経過とともに単調に減少する連続性を持った事象とする。ここで、添え字の "A, I" は機器 A へ与えられる第1回目の起動指令機会における起動を意味し、その時刻を  $t_{A,I}$  と表記する。機器 A が運転中である事象は次式で表現される。

$$S_A(t_{A,I} - t_0) \sigma_{A,I} D_{A,I} O_A(t - t_{A,I}) \quad (17)$$

ここで、  $t_0$  は検討を開始した時点、つまり初期時

刻を意味する。\$S\_A(t)\sigma\_{A,i}D\_{A,i}\$あるいは、\$S\_A(t)\sigma\_{A,i}D\_{A,i}O\_A(t)\$と各要素の積のセットで初めて運転状態事象として意味をなす。運転中である事象の発生確率の具体的な一例としては次式の表現がある。

$$\Pr(S_A(t_{A,i}-t_0)\sigma_{A,i}D_{A,i}O_A(t-t_{A,i})) = S_{A0} \exp\{-\lambda_{A,S}(t_{A,i}-t_0)\} \Pr(\sigma_{A,i})\Pr(D_{A,i})\exp\{-\lambda_{A,O}(t-t_{A,i})\}. \quad (18)$$

ここで、\$\lambda\_{A,O}\$は機器Aの運転中の故障率、\$(t-t\_{A,i})\$は運転開始後の継続時間である。

時刻 \$t > t\_{A,i}\$ における表記(18)式を見ると、運転状態へ移行後は時刻\$t\_{A,i}\$までの待機中の健全性事象 \$S\_A(t\_{A,i}-t\_0)\$は確定した事象となっている。同様に起動指令 \$\sigma\_{A,i}\$ と運転開始成功事象 \$D\_{A,i}\$も確定事象である。時刻\$t\$の関数となっているのは(18)式の場合 \$O\_A(t-t\_{A,i})\$だけである。この区別を明確にするため、変数でない時刻\$t\_{A,i}\$等を \$\tau\_{A,i}\$の様にギリシャ文字表記とし、変数を含まない事象は確定事象であることの判別が容易な表記法を用いる。

$$S_A(t_{A,i}-t_0)\sigma_{A,i}D_{A,i}O_A(t-t_{A,i}) \Rightarrow S_A(\tau_{A,i}-\tau_0)\sigma_{A,i}D_{A,i}O_A(t-\tau_{A,i}) \quad (19)$$

なお、\$\sigma\_{A,1}\$と\$\sigma\_{A,2}\$はそれぞれ異なる時刻に与えられる起動指令で互いに独立な事象として扱う。

これまでの式において出てきた\$S\_A(t)\$、\$O\_A(t)\$は機器そのものの特性を表している。\$S\_A(t)\$は機器に対して起動指令が一切与えられない場合の健全性であり、\$O\_A(t)\$は完全なる起動が達成された後の事象である。いわば基本要素的事象である。これに対し、(17)式は特定の運転条件に置かれた機器が運転状態にある事象である。

機器は一度起動され運転状態になっている場合は再度起動されることはないことに留意する必要がある。\$i\$回目の起動指令機会において起動され運転状態となっている事象を\$A^i\_O(t)\$と表記する。

### 3.3 機器の分類

3.1節の検討でも述べた様に、システムを構成する機器/要素を2種類に分類して取り扱って行く必要がある。

第一のタイプは外部からの支援なしに運転の継続が可能である機器で自己支持型(SS-type: Self-sustained type)と本論文では呼ぶ。具体的な例としては、蓄電池、アイソトープ電池、蓄圧タンク、高所に設置された給水タンク、外部電源等が考えられる。図3にこのタイプの機器の模式的表現を示す。

機器Aに外部からの起動指令が与えられる機会が複数回ある場合を考える。各機会において起動指令

が与えられる事象を\$\sigma\_{A,j}\$とし、その時の起動成功事象を\$D\_{A,j}\$とする。\$i\$番目の起動指令機会に運転状態となった事象は、前節の表記を用いると一般的に次の式

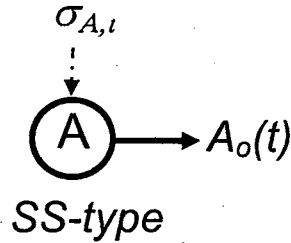


図3 SS-typeの機器

で表される。

$$A^i_O(t) = \prod_{j=1}^{i-1} \sigma_{A,j} D_{A,j} \sigma_{A,i} D_{A,i} S_A(\tau_{A,i}-\tau_0) O_A(t-\tau_{A,i}). \quad (20)$$

ここで \$\sigma\_{A,j}D\_{A,j}\$ は起動指令機会 \$j\$ において起動指令が与えられなかつ起動が成功した事象を意味する。事象 \$Q\$ の余事象を \$\bar{Q}\$ で表すと、\$\overline{\sigma\_{A,j}D\_{A,j}}\$ はそれ以外の事象、つまり起動しなかつた事象ということになる。展開して整理すると、\$\overline{\sigma\_{A,j}D\_{A,j}} = \overline{\sigma\_{A,j}} + \overline{\sigma\_{A,j}D\_{A,j}}\$ となり、起動指令が与えられなかつた場合と、起動指令が与えられたが起動に失敗した場合から構成されている事がわかる。また、一度運転状態となった機器が停止した場合は故障と考え再度の起動は不可としてある。

異なる起動指令機会において運転状態となった事象間には、\$A^i\_O(t) \cdot A^j\_O(t) = \phi\$ (\$i \neq j\$) の関係がある。さらに、時刻 \$t\$ において機器Aが運転状態にある全事象は、

$$A_O(t) = \sum_{i=1}^{t_{A,i}} A^i_O(t) \quad (21)$$

となる。ここで、\$t\_{A,i} \le t\$ は時刻 \$t\$ までの起動指令を考慮することを意味する。

第二の種類は出力を生成するためには他の機器からの支援(入力)を必要とするタイプである。従属型(D-type: Dependent-type)と本論文では呼ぶことにする。図4にSS-type機器により支援されて運転するD-type機器の模式的表現を示す。

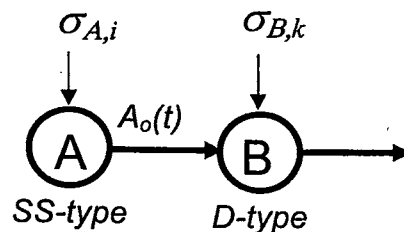


図4 SS-type機器とD-type機器の接続

D-typeの機器では起動指令 $\sigma_{B,k}$ が与えられても必要とされている入力がない場合には運転状態とはならず、出力を生成することはできない。具体的な例としては、エンジン、電動モータ、ポンプ等がある。これらの機器は健全状態であっても燃料、電力、給水等の入力がない場合は起動指令を与えても、それぞれ期待される動力、水流等の出力を生成することはできない。

機器Aに複数回の起動指令機会が与えられる場合の時刻 $t$ における機器Bの運転状態の全事象 $B_O(t)$ は次のようになる。

$$B_O(t) = \sum_{i=1}^{t_{A,i}} A'_O(t) \cdot \sum_{t_{B,k} \geq t_{A,i}} \left\{ S_B(\tau_{B,k} - \tau_0) \prod_{l=1}^{k-1} \overline{\sigma_{B,l} D_{B,l}} \cdot \sigma_{B,k} D_{B,k} O_B(t - \tau_{B,k}) \right\} \quad (22)$$

D-typeの機器の場合は支援機器の運転状態事象と $S_B(t)\sigma_{B,l}D_{B,l}O_B(t)$ の積で初めて運転状態事象となり得る。BはD-typeなので、運転状態事象 $B_O(t)$ は機器Aの運転状態とセットとなっており、システムの動作履歴を反映していることがわかる。(20)式と(22)式との違いはここから出ている。

ここで、(20)式と類似の式

$$B^i(t) = \prod_{j=1}^{i-1} \overline{\sigma_{B,j} D_{B,j}} \sigma_{B,i} D_{B,i} S_B(\tau_{B,i} - \tau_0) O_B(t - \tau_{B,i}) \quad (23)$$

を定義しておく。ここでは添え字 $O$  (operation) は付いていない。これはD-type機器の運転には必ず入力が必要であり、(23)式は運転状態を保証するものではないからである。

さらに、厳密にはBの運転開始後Aからの入力が途絶えて、停止状態になった時でも機器Bが健全状態を保っており、再度の起動により運転状態となり得る場合もある。取り扱いが複雑になるので本論ではこの事象は除外している。

なお、Bの後ろに別のD-type機器Cが直列に繋がった場合のCの運転状態事象 $C_O(t)$ は(24)式となる。本論では、後続の機器Cが運転状態になくても上流に置かれた機器Bの運転継続は可能であるとした。

$$C_O(t) = \sum_{i=1}^{t_{A,i}} A'_O(t) \cdot \left\{ \sum_{t_{B,k} \geq t_{A,i}} S_B(\tau_{B,k} - \tau_0) \prod_{l=1}^{k-1} \overline{\sigma_{B,l} D_{B,l}} \cdot \sigma_{B,k} D_{B,k} O_B(t - \tau_{B,k}) \cdot \sum_{t_{C,m} \geq t_{B,k}} \left( S_C(\tau_{C,m} - \tau_0) \prod_{n=k}^{m-1} \overline{\sigma_{C,n} D_{C,n}} \cdot \sigma_{C,m} D_{C,m} O_C(t - \tau_{C,m}) \right) \right\} \quad (24)$$

Aは時刻 $t_{A,i}$ で起動が成功、Bは時刻 $t_{B,k} \geq t_{A,i}$ で起動が成功、Cは時刻 $t_{C,m} \geq t_{B,k}$ で起動が成功するという条件を反映した式となっている。

### 3.4 複数機器による支援

D-typeの機器が複数のSS-type機器の支援を受けて運転する場合を検討してみよう。図5に示す様に、A,BのSS-typeの機器にはそれぞれ $t_{A,i}$ 、 $t_{B,m}$ に起動指令機会が設定され、D-typeの機器Cには時刻 $t_{C,k}$ に運転の開始指令機会が設定されているとする。

比較的単純なシステムであるが、支援機器の運転状態の履歴とD-type機器Cの起動の時刻との関係で事象の組み合わせが多くなりやや複雑な結果となる。

ここで、各機器に表1に示すタイミングの起動指令機会が与えられているとする。

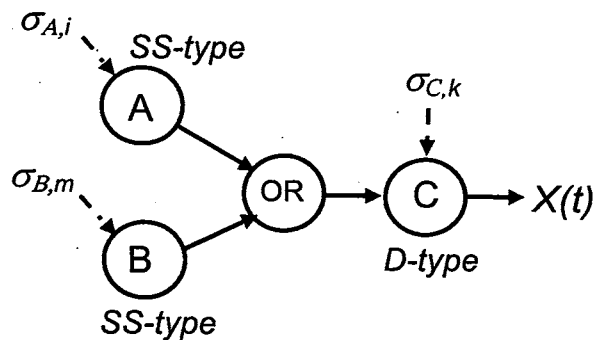


図5 OR結合された複数機器による支援

表中の番号は各機器での第何回目の起動指令機会であることを示す数値である。

時刻 $t_1$ で機器Aが運転状態となる。

$$A'_O(t_1) = \sigma_{A,1} D_{A,1} S_A(\tau_1 - \tau_0); \quad t_{A,1} = t_1 \quad (25)$$

時刻 $t_2$ で機器Cに起動指令が与えられる。

$$A'_O(t_2) = \sigma_{A,1} D_{A,1} S_A(\tau_1 - \tau_0) O_A(t_2 - \tau_1) \quad (26)$$

$$C_O(1; t_2) = A'_O(t_2) \sigma_{C,1} D_{C,1} S_C(\tau_2 - \tau_0) = A'_O(t_2) C^1(t_2); \quad t_{C,1} = t_2 \quad (27)$$

表1 各機器への起動指令機会

時刻	A	B	C
$t_0$			
$t_1$	1		
$t_2$			1
$t_3$		1	
$t_4$			2
$t_5$	2		
$t_6$		2	
$t_7$			3

表記 $C_O(1; t_2)$ は機器Cに第1回目の起動指令機会があった場合の時刻 $t_2$ に於ける機器Cの全運転状態

事象を意味する。実質的に $C_0(t)$ と同じであるが、何回の起動指令機会を経ているかを明確に示す表記法として導入した。

ここで、機器Cが新たに運転状態となる事象は、

新規起動 = 支援事象・未運転状態事象・起動指令・起動成功事象・機器健全状態・(起動後運転状態) (28)

と各事象の積となっている。「(起動後運転状態)」は起動時には存在しないが、起動後の時間経過とともに現れてくるので、括弧の中に入れ(28)式中に記した。

時刻 $t_3$ で機器Bが運転状態となり機器Cへの支援を開始する。

$$\begin{aligned} A_o^1(t_3) &= \sigma_{A,1} D_{A,1} S_A(\tau_1 - \tau_0) O_A(t_3 - \tau_1) \\ B_o^1(t_3) &= \sigma_{B,1} D_{B,1} S_B(\tau_3 - \tau_0); \quad t_{B,1} = t_3 \\ C_o(1;t_3) &= A_o^1(t_3) \sigma_{C,1} D_{C,1} S_C(\tau_2 - \tau_0) O_C(t_3 - \tau_2) \\ &\quad + B_o^1(t_3) \overline{A_o^1(t_3)} \sigma_{C,1} D_{C,1} S_C(\tau_2 - \tau_0) O_C(t_3 - \tau_2). \end{aligned} \quad (29)$$

ここで、Cの運転状態事象の式の第2項は、既にAの支援で運転状態になっている機器にBの支援が加わった事象を表す。この式で下線は特に着目すべき部分であることを示しているが、数学的な意味は特には無い。時刻 $t_3$ ではこの項は第1項の部分事象であるが、事象AとBが互いに独立な事象であるため時刻 $t_3$ 以降では第2項は第1項に含まれない部分が出てくる。(29)式を $C^1(t)$ を用いて表わすと(30)式となる。

$$C_o(1;t_3) = A_o^1(t_3) C^1(t_3) + B_o^1(t_3) \overline{A_o^1(t_3)} C^1(t_3). \quad (30)$$

時刻 $t_4$ では機器Cに第2回目の起動指令機会がある。

$$\begin{aligned} A_o^1(t_4) &= \sigma_{A,1} D_{A,1} S_A(\tau_1 - \tau_0) O_A(t_4 - \tau_1) \\ B_o^1(t_4) &= \sigma_{B,1} D_{B,1} S_B(\tau_3 - \tau_0) O_B(t_4 - \tau_3) \\ C_o(2;t_4) &= A_o^1(t_4) C^1(t_4) + B_o^1(t_4) \overline{A_o^1(t_4)} C^1(t_4) + \Delta C_o(2;t_4) \end{aligned} \quad (31)$$

ここで、上式の第3項 $\Delta C_o(2;t_4)$ により第2回目の起動指令機会において新たに起動される事象を表すこととする。時刻 $t_4$ での機器Cの未運転状態事象は

$$A_o^1(\tau_2) + A_o^1(\tau_2) \sigma_{C,1} D_{C,1} \quad (32)$$

であることから(28)式により $\Delta C_o(2;t_4)$ が算出される。一たび運転状態となった機器Cは新たな起動対象からは除外しておくことになる。(22)式では(32)式中の $A_o^1(\tau_2)$ に相当する項が現れないが、これは支援機器がAのみであるため、 $A_o^1(\tau_2) \cdot A_o^2(\tau_3) = A_o^2(\tau_3)$ 等の関係から $A_o^1(\tau_2)$ を記す必要がないためである。図5の場合は、機器Aとは独立な支援をする機器Bが存在しているため、 $A_o^1(\tau_2) \cdot B_o^1(\tau_4)$ の項が残るため(32)式の表記

が必要となる。

$$\begin{aligned} \Delta C_o(2;t_4) &= \{A_o^1(t_4) + B_o^1(t_4)\} \cdot \overline{A_o^1(\tau_2) + A_o^1(\tau_2) \sigma_{C,1} D_{C,1}} \\ &\quad \cdot \sigma_{C,2} D_{C,2} \cdot S_C(\tau_4 - \tau_0) \\ &= A_o^1(t_4) C^2(t_4) + B_o^1(t_4) A_o^1(\tau_2) C^2(t_4) \\ &\quad + B_o^1(t_4) \cdot \overline{A_o^1(\tau_2)} \cdot \sigma_{C,2} D_{C,2} \cdot S_C(\tau_4 - \tau_0) \end{aligned} \quad (33)$$

時刻 $t_5$ で機器Aに、時刻 $t_6$ で機器Bにそれぞれ再度の起動指令機会がある。

$$\begin{aligned} A_o^1(t_6) &= \sigma_{A,1} D_{A,1} S_A(\tau_1 - \tau_0) O_A(t_6 - \tau_1) \\ A_o^2(t_6) &= \sigma_{A,1} D_{A,1} \sigma_{A,2} D_{A,2} S_A(\tau_5 - \tau_0) O_A(t_6 - \tau_5); \quad t_{A,2} = t_5 \\ B_o^1(t_6) &= \sigma_{B,1} D_{B,1} S_B(\tau_3 - \tau_0) O_B(t_6 - \tau_3) \\ B_o^2(t_6) &= \sigma_{B,1} D_{B,1} \sigma_{B,2} D_{B,2} S_B(\tau_6 - \tau_0); \quad t_{B,2} = t_6 \end{aligned} \quad (34)$$

機器Cの運転状態事象は、

$$\begin{aligned} C_o(2;t_6) &= \{A_o^1(t_6) + B_o^1(t_6) A_o^1(\tau_3) + B_o^2(t_6) A_o^1(\tau_6)\} C^1(t_6) \\ &\quad + \{A_o^1(t_6) + B_o^1(t_6) A_o^1(\tau_2) + B_o^2(t_6) A_o^1(\tau_6)\} \cdot C^2(t_6) \\ &\quad + B_o^1(t_6) \overline{A_o^1(\tau_2)} \cdot \sigma_{C,2} D_{C,2} S_C(\tau_4 - \tau_0) O_C(t_6 - \tau_4) \\ &\quad + A_o^2(t_6) B_o^1(\tau_5) \overline{A_o^1(\tau_2)} \cdot \sigma_{C,2} D_{C,2} S_C(\tau_4 - \tau_0) O_C(t_6 - \tau_4). \end{aligned} \quad (35)$$

となる。

ここで、(29)式の第2項導出と同様に形式的には以下の各項も考えられるが、いずれも排反事象の積が含まれていて消失している。

$$\begin{aligned} &A_o^2(t) A_o^1(\tau_5) C^1(t) \\ &A_o^2(t) B_o^1(\tau_5) A_o^1(\tau_3) C^1(t) \\ &A_o^2(t) A_o^1(\tau_5) C^2(t) \\ &A_o^2(t) B_o^1(\tau_5) A_o^1(\tau_2) C^2(t) \\ &B_o^2(t) B_o^1(\tau_6) A_o^1(\tau_3) C^1(t) \\ &B_o^2(t) B_o^1(\tau_6) \overline{A_o^1(\tau_2)} \cdot \sigma_{C,2} D_{C,2} S_C(\tau_4 - \tau_0) O_C(t - \tau_4) \\ &B_o^2(t) B_o^1(\tau_6) A_o^1(\tau_2) C^2(t) \end{aligned}$$

時刻 $t_7$ での機器Cの未運転状態事象は、

$$\begin{aligned} &\overline{A_o^1(\tau_2) + A_o^1(\tau_2) \sigma_{C,1} D_{C,1}} \cdot \overline{A_o^1(\tau_4) \cdot B_o^1(\tau_4) + A_o^1(\tau_4) \cdot B_o^1(\tau_4) \cdot \sigma_{C,2} D_{C,2}} \\ &\quad + A_o^1(\tau_4) \cdot B_o^1(\tau_4) \cdot \sigma_{C,2} D_{C,2} + A_o^1(\tau_4) \cdot B_o^1(\tau_4) \cdot \sigma_{C,2} D_{C,2} \end{aligned} \quad (36)$$

となるので、時刻 $t_7$ で機器Cが新たに起動される事象は、次式により算出される。

$$\begin{aligned} \Delta C_o(3;t_7) &= \{A_o^1(t_7) + A_o^2(t_7) + B_o^1(t_7) + B_o^2(t_7)\} \cdot \overline{A_o^1(\tau_4) \cdot B_o^1(\tau_4)} \\ &\quad + A_o^1(\tau_4) \cdot B_o^1(\tau_4) \cdot \sigma_{C,2} D_{C,2} + A_o^1(\tau_4) \cdot B_o^1(\tau_4) \cdot \sigma_{C,2} D_{C,2} \\ &\quad + A_o^1(\tau_4) \cdot B_o^1(\tau_4) \cdot \sigma_{C,2} D_{C,2} \cdot \sigma_{C,3} D_{C,3} \cdot S_C(\tau_7 - \tau_0) \end{aligned} \quad (37)$$

その結果、時刻 $t_7$ 以降での機器Cの運転状態事象は(38)式と得られる。

$$\begin{aligned} C_o(3;t) &= \{A_o^1(t) + B_o^1(t) A_o^1(\tau_3) + B_o^2(t) A_o^1(\tau_6)\} \cdot C^1(t) \\ &\quad + \{A_o^1(t) + B_o^1(t) A_o^1(\tau_2) + B_o^2(t) A_o^1(\tau_6)\} \cdot C^2(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \{A_o^1(t) + A_o^1(\tau_2) \cdot \overline{A_o^1(\tau_4)} \cdot B_o^1(\tau_4) + B_o^1(t) \cdot A_o^1(\tau_4) + B_o^2(t) \cdot A_o^1(\tau_4)\} \cdot C^3(t) \\
& + B_o^2(t) \cdot A_o^1(\tau_2) \cdot \overline{A_o^1(\tau_4)} \cdot \sigma_{C,1} D_{C,1} \cdot \sigma_{C,3} D_{C,3} S_C(\tau_7 - \tau_0) O_C(t - \tau_7) \\
& + \{B_o^1(t) \cdot \overline{A_o^1(\tau_2)} + A_o^2(t) B_o^1(\tau_2) \cdot \overline{A_o^1(\tau_4)}\} \cdot \sigma_{C,2} D_{C,2} S_C(\tau_3 - \tau_0) O_C(t - \tau_4) \\
& + \{A_o^2(t) \cdot B_o^1(\tau_4) + B_o^1(t) \cdot A_o^1(\tau_2)\} \cdot \sigma_{C,2} D_{C,2} \cdot \sigma_{C,3} D_{C,3} S_C(\tau_7 - \tau_0) O_C(t - \tau_7) \\
& + \{A_o^2(t) \cdot \overline{B_o^1(\tau_4)} + B_o^2(t) \cdot \overline{A_o^1(\tau_2)}\} \cdot \sigma_{C,3} D_{C,3} S_C(\tau_7 - \tau_0) O_C(t - \tau_7) \quad (38)
\end{aligned}$$

次にSS-type機器の出力がANDで結合された出力が機器Cへの支援として与えられている図6の場合を検討してみる。この場合、機器CにとってはA、Bの結合を等価的に単一の機器からの出力と考えることができるので、ORの結合に比較し簡単な表現となる。

この場合、事象 $A_o(t)$ と $B_o(t)$ の積は多数の組み合わせで生じる複数項となり、それぞれに対応して機器Cの起動が考えられる。

$$\begin{aligned}
C_o(m; t) &= \sum_{i=1}^{t_1 S} A_o^i(t) \cdot \sum_{k=1}^{t_2 S} B_o^k(t) \\
& \cdot \sum_{t_m \geq \max(t_i, t_k)}^{t_1 S} \left[ S_C(\tau_m - \tau_0) \prod_{t_n \geq \max(t_i, t_k)}^{t_m - 1} \overline{\sigma_{C,n}} D_{C,n} \cdot \sigma_{C,m} D_{C,m} O_C(t - \tau_m) \right] \quad (39)
\end{aligned}$$

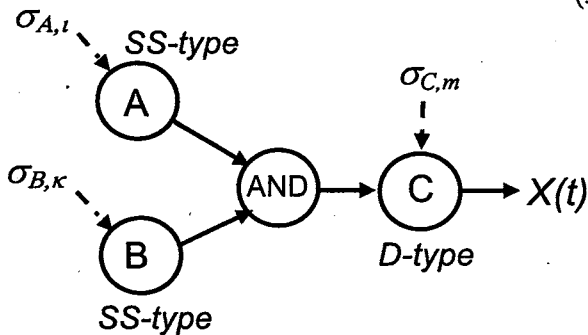


図6 AND結合された複数機器による支援

ただし、Cの起動は $A_o(t)$ 、 $B_o(t)$ が共に存在する場合のみ可能のため  $t_m \geq \max(t_i, t_k)$  等の条件が課せられている。

### 3.5 論理ループ構造の形成

もし、D-typeの機器の出力の種類が自身の運転に必要な入力の種類と一致する場合は図7に示す特別な運転状態が実現される。

機器BはD-typeであるため運転開始には他のSS-type機器Aからの支援が必要である。自身の出力を入力として使用できる段階となってから起動時に使用した機器Aを切り離すというステップを踏んで図7の運転状態が実現できる。この様子を示したのが図8である。

図8の最初の段階での機器Bの出力事象は、

$$B_{out}(t_{B,1}) = A_o^1(t_{B,1}) S_B(\tau_{B,1} - \tau_0) \sigma_{B,1} D_{B,1} = B_o(1; t_{B,1}). \quad (40)$$

となる。次の段階でBの出力事象をAの出力事象とともに自身の入力事象としても、

$$B_m(t_{B,1}) = A_o^1(t_{B,1}) + A_o^1(t_{B,1}) S_B(\tau_{B,1} - \tau_0) \sigma_{B,1} D_{B,1} = A_o^1(t_{B,1}). \quad (41)$$

と入力事象に変化はない。従ってBの出力事象も変化しない。これは、Bの出力を入力部へ接続しても新たにBが起動することも、停止する事象も起こらないことに対応している。初めからループ構造が存在していて、Bが動作状態になった時、実質的にループの運転状態が確立したと考えても良い。

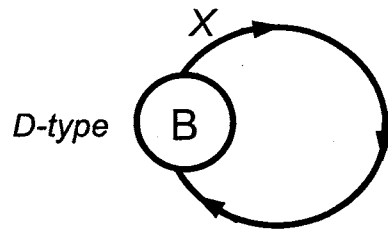


図7 単一機器によるループ構成

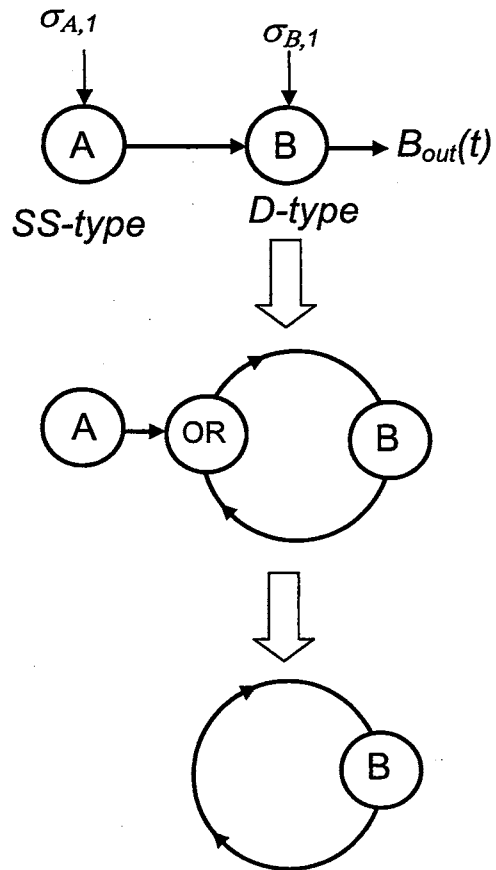


図8 単一機器によるループの形成過程

次に機器Aを切り離しても運転状態は継続し、Bへの入力は

$$B_m(t_{B,1}) = A_0^1(t_{B,1})S_B(\tau_{B,1}-\tau_0)\sigma_{B,1}D_{B,1} \quad (42)$$

となる。この時点でBの出力事象は(40)式と同じままで、単一機器によるループの運転状態が実現することとなる。時刻 $t_{B,1}$ 以降でのBの運転状態事象は運転中の故障進展の項を加え、

$$B_0^L(l;t) = A_0^1(\tau_{B,1})S_B(\tau_{B,1}-\tau_0)\sigma_{B,1}D_{B,1}O_B(t-\tau_{B,1}) \quad (43)$$

となる。ここで、上付きの添え字 $L$ によりループ中に置かれた機器の運転状態事象を表すことにする。

ループ運転状態事象はループ運転確立時の外部支援事象( $A_0^1(\tau_{B,1})$ )とループ部構成機器の運転状態事象( $S_B(\tau_{B,1}-\tau_0)\sigma_{B,1}D_{B,1}O_B(t-\tau_{B,1})$ )の積となっている。複数の起動指令機会が設定されている場合は、それぞれの機会に確立されたループ運転状態事象の和が全ループの運転状態事象となる。

図7の関係をブール代数式で表現すると、

$$X = B \cdot X \quad (44)$$

となり、(5)式より  $X = mB$  と解が得られる。ここで、 $X$ は機器Bからの出力事象 $B_{out}$ であり、 $B$ はループ運転状態における機器B自体の動作事象に対応している。今の場合、Bの起動指令機会は1回( $t_{B,1}$ )のみであるので、(44)式の解は、時刻 $t$ において

$$B_{out}(t) = mS_B(\tau_{B,1}-\tau_0)\sigma_{B,1}D_{B,1}O_B(t-\tau_{B,1}) \quad (45)$$

となる。(43)式と(45)式を比較すると、 $m = A_0^1(\tau_1)$ となっており、任意ブール代数要素 $m$ はループ運転を成立させるための支援事象であることがわかる( $m$ の決定規則)。

既にシステムから切り離された機器Aはループ運転には関与せず、 $A_0^1(\tau_{B,1})$ という確定事象としてループ運転確立時の開始条件として(43)式中に残る。

式(45)において $m=1$ 、 $\sigma_{B,1}=1$ とした場合は、機器Bの機能を最大限活用して達成されたループ運転状態と言える。図8の手順では、機器Aの支援事象 $A_0^1(\tau_1)$ が存在する場合のみループ運転の確立を試みている( $\sigma_{B,1}$ )ので、機器Bの機能の部分活用となっている。

ここで、機器Aを切り離さない状態でのBの運転状態事象について考察してみる。機器B自身の出力による支援で継続するループ運転の事象ではなく、機器Aの支援による運転状態事象((22)式の $B_0(t)$ )も存在するはずである。しかし、 $A_0^1(t)$ が単調に減少する場合、

$$A_0^1(t_i) \supseteq A_0^1(t_j); \quad t_i \leq t_j \quad (46)$$

となり、 $B_0^L(t) \supseteq B_0(t)$ の関係が成立しているのでこ

の場合(43)式が残るのみである。

つまり、ループ状態による運転が形成された後ではループに接続する外部の要素が残っていても、ループ開始条件として関与するのみでループ運転状態事象には関与しない。さらにループ運転形成後、外部要素Aに追加の出力事象 $A_0^2(t)$ があっても、ループ運転が新たに開始されるわけではなくループ運転状態には何らの影響も及ぼさない。

一般にSS-type機器A、D-type機器Bともに複数回の起動指令機会がある場合の単一機器によるループ運転状態事象 $B_0^L(k;t)$ は、各々の機会にループ運転状態が形成される時に機器Aから与えられた支援事象が $m$ となることを用いて、

$$B_0^L(k;t) = \sum_{l=1}^{t_{B,1}^{k-1}} \left[ \sum_{t_{B,1}^{k-1}}^{t_{B,1}^{k-1}} \left\{ A_0^1(\tau_{B,k}) \cdot \prod_{i=1}^{k-1} \overline{\sigma_{B,i}(\tau_{B,i})D_{B,i}} \cdot \sigma_{B,k}(\tau_{B,k})D_{B,k}S_B(\tau_{B,k}-\tau_0)O_B(t-\tau_{B,k}) \right\} \right] \quad (47)$$

となる。(22)式と比較すると、機器Aの運転状態はBのループ確立時における事象が用いられており、 $A_0(t) \Rightarrow A_0^1(\tau_{B,k})$ と置き換えられていることがわかる。

### 3.6 単一支援、単一ループ構造

図2の関係をブール代数式で表現すると、

$$X = B \cdot C \cdot X + A \cdot B \quad (48)$$

となり、(5)式より  $X = mBC + AB$  と解が得られる。前節で得られた結論よりループ運転成立後は要素Aはループ運転には関与しない。従って図2のループ部分は要素B,Cの積 $BC$ が図7の機器Bに対応した単一機器によるループ構成と同一であることがわかる。

任意ブール代数要素 $m$ は、前節で得られた規則によりループ運転成立時の要素Aよりの支援事象となる。

要素B、Cがそれぞれ時刻 $t_1$ 、 $t_2$ に運転を開始し、ループ運転が時刻 $t_2$ に成立した場合を考える。時刻 $t_2$ 以降における $mBC$ は要素B,Cのそれぞれの運転状態事象と、ループ運転成立時の要素Aよりの支援事象( $A_0(t_2)$ )との積となる。それ故 $X$ は、非ループ部( $AB$ )の寄与も加え、次式と得られる。

$$X = A_0(t_2)\sigma_{B,1}D_{B,1}S_B(\tau_1-\tau_0)O_B(t-\tau_1)\sigma_{C,1}D_{C,1}S_C(\tau_2-\tau_0)O_C(t-\tau_2) + A_0(t)\sigma_{B,1}D_{B,1}S_B(\tau_1-\tau_0)O_B(t-\tau_1) \quad (49)$$

もし、要素Cに第二の起動指令機会が設定されており時刻 $t_3$ で追加のループ運転事象が確立する場合を考えてみよう。時刻 $t_2$ で、要素Cが起動しなかった事象 $\overline{A_0(t_2)} + A_0(t_2)\sigma_{C,1}D_{C,1}$ を用い、要素Aよりの支援事象( $m=A_0(t_3)$ )、要素Bの運転状態事象と要素Cが新たに運転状態となる事象との積で、時刻 $t_3$ にお



いての追加のループ運転状態事象が得られる。

$$A_0(\tau_3) \cdot \sigma_{B,1} D_{B,1} S_B(\tau_1 - \tau_0) O_B(t_3 - \tau_1) \cdot \{A_0(\tau_2) + A_0(\tau_2) \sigma_{C,1} D_{C,1}\} \cdot \sigma_{C,2} D_{C,2} S_C(\tau_3 - \tau_0) = A_0(\tau_3) \cdot \sigma_{B,1} D_{B,1} S_B(\tau_1 - \tau_0) O_B(t_3 - \tau_1) \cdot \sigma_{C,1} D_{C,1} \cdot \sigma_{C,2} D_{C,2} \cdot S_C(\tau_3 - \tau_0) \quad (50)$$

時刻  $t_3$  以降要素Bの全ループ運転状態事象  $B_0^L(2;t)$  は

$$B_0^L(2;t) = A_0(\tau_3) B^1(t) C^1(t) + A_0(\tau_3) B^1(t) C^2(t). \quad (51)$$

となる。

ブール代数式中の要素Cについては、最初の起動による運転事象  $C_1$  と2回目の機会において起動した運転事象  $C_2$  との和と考える事ができる。

$$X = B \cdot (C_1 + C_2) \cdot X + A \cdot B = B \cdot C_1 \cdot X + B \cdot C_2 \cdot X + A \cdot B. \quad (52)$$

(52) 式の解は(7)式により、

$$X = m_1 B \cdot C_1 + m_2 B \cdot C_2 + A \cdot B. \quad (53)$$

となる。  $BC_1$  は1回目の起動機会、  $BC_2$  は2回目それぞれループ運転状態となった事象である。(51)式と(53)式を比較すると、

$$m_1 = A_0^1(\tau_2), m_2 = A_0^1(\tau_3). \quad (54)$$

と、各ループ運転状態確立時の外部からの支援事象となっていることがわかる。2回目以降の起動指令機会に開始されるループ運転状態事象の算出では未運転状態事象を用い、新たにループ運転状態となる事象を求める必要がある。

### 3.7 相互支援ループ構造の形成

D-typeの機器2つが互いに相手を支援することによりループを構成し運転状態を維持することも可能である。3.5節と同様に、SS-type機器Aの助けにより図9の手順で相互支援ループが形成される場合を考えてみる。機器A,B,Cの起動指令機会は、それぞれ時刻  $t_1, t_2, t_3$  の1回と設定されているとする。

時刻  $t_3$  での機器B, Cの運転状態事象は、

$$B_0^1(1;t_3) = A_0^1(t_3) S_B(\tau_2 - \tau_0) \sigma_{B,1} D_{B,1} O_B(t_3 - \tau_2). \quad (55)$$

$$C_0^1(1;t_3) = A_0^1(t_3) S_B(\tau_2 - \tau_0) \sigma_{B,1} D_{B,1} O_B(t_3 - \tau_2) \times S_C(\tau_3 - \tau_0) \sigma_{C,1} D_{C,1}. \quad (56)$$

となる。次にCの出力をAの出力とともにBへの入力としても、

$$B_{in}(t_3) = A_0^1(t_3) + A_0^1(t_3) S_B(\tau_2 - \tau_0) \sigma_{B,1} D_{B,1} O_B(t_3 - \tau_2) \cdot S_C(\tau_3 - \tau_0) \sigma_{C,1} D_{C,1} = A_0^1(t_3). \quad (57)$$

と変化しない。従って、B, Cの運転状態事象も変化しない。この時点でループ運転状態が確立する。

次の段階で機器Aを切り離すと、Bへの入力  $B_{in}$  は  $B_{in}(t_3) = A_0^1(\tau_3) S_B(\tau_2 - \tau_0) \sigma_{B,1} D_{B,1} O_B(t_3 - \tau_2) \cdot S_C(\tau_3 - \tau_0) \sigma_{C,1} D_{C,1}. \quad (58)$  となり、  $B_0^L(1;t_3) = B_{in}(t_3) \sigma_{B,1} D_{B,1} S_B(\tau_2 - \tau_0) O_B(t_3 - \tau_2)$  の関係から  $B_0^L(1;t_3)$  を求めると、

$$B_0^L(1;t_3) = B_{in}(t_3) \sigma_{B,1} D_{B,1} S_B(\tau_2 - \tau_0) O_B(t_3 - \tau_2) = A_0^1(\tau_3) \sigma_{B,1} D_{B,1} \sigma_{C,1} D_{C,1} \cdot S_B(\tau_2 - \tau_0) O_B(t_3 - \tau_2) S_C(\tau_3 - \tau_0) = C_0^L(1;t_3). \quad (59)$$

となり  $C_0^L(1;t_3)$  と同じになっている事がわかる。

時刻  $t_3$  以降でのB, Cの運転状態事象は運転中の故障進展の影響を考慮して、

$$B_0^L(1;t) = C_0^L(1;t) = A_0^1(\tau_3) \sigma_{B,1} D_{B,1} \sigma_{C,1} D_{C,1} \cdot S_B(\tau_2 - \tau_0) O_B(t - \tau_2) S_C(\tau_3 - \tau_0) O_C(t - \tau_3). \quad (60)$$

となる。

外部からの支援がない孤立した形でループ運転状態が成立している場合、ループを構成する各機器の運転状態事象は全て同一となる。

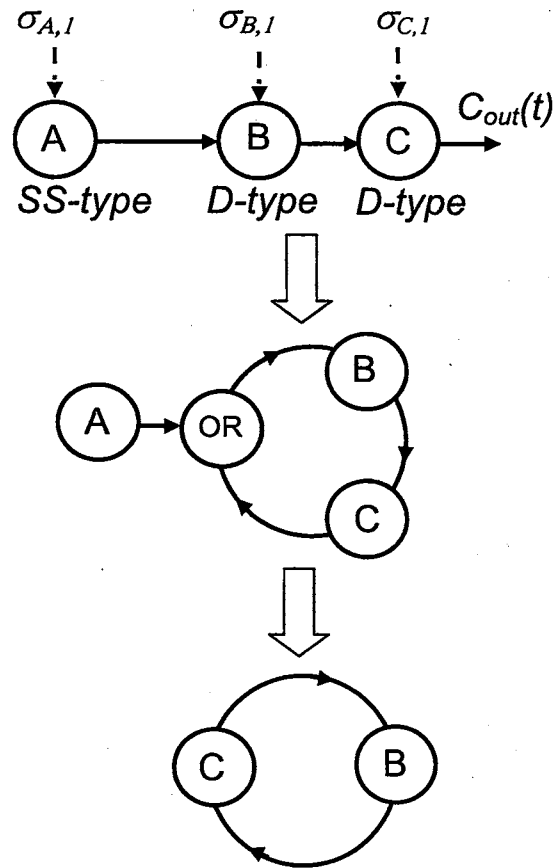


図9 相互支援ループ構造の形成

図9中の最後の段階、相互支援ループ構造が形成された時点での関係をブール代数式で表現すると、

$$X = B \cdot C \cdot X. \quad (61)$$

となり、(5)式より  $X = mBC$  と解が得られる。(61)式は(44)式の要素BをBとCに分割して考えただけである。従って、任意ブール代数要素  $m$  はループ運転を成立させるための支援事象  $A_0^1(\tau_3)$  であることがわかる。それ故、(61)式と  $m$  の決定規則より直接(60)式

を得ることが可能である。

一般に機器B, Cに複数回の起動指令機会が与えられ、ループ運転が複数時刻において順次追加された場合の運転状態事象は $m$ の決定規則を用い、各起動指令機会に新たにループ運転状態となる事象を算出し加え合わせる事により(62)式となる。

$$B_0^L(k;t) = C_0^L(m;t) = \left\{ \begin{array}{l} S_A(\tau_{A,i} - \tau_0) \prod_{j=1}^{i-1} \overline{\sigma_{A,j} D_{A,j}} \cdot \sigma_{A,i} D_{A,i} O_A(\tau_{C,m} - \tau_{A,i}) \\ S_B(\tau_{B,k} - \tau_0) \prod_{l=1}^{k-1} \overline{\sigma_{B,l} D_{B,l}} \cdot \sigma_{B,k} D_{B,k} O_B(t - \tau_{B,k}) \\ S_C(\tau_{C,m} - \tau_0) \prod_{n=1}^{m-1} \overline{\sigma_{C,n} D_{C,n}} \cdot \sigma_{C,m} D_{C,m} O_C(t - \tau_{C,m}) \end{array} \right\} \quad (62)$$

ここで、図9の第2番目の段階、機器Aが接続されたままの状態にある場合を考察してみる。ループ途中に置かれた機器Bの運転状態としては図8の考察と同様、機器Aの支援による運転状態事象( $B_0(t)$ , (22)式)が存在する。これは明らかに(62)式の部分事象とはなっておらず、消去されることはない。

### 3.8 複数支援、単一ループ構造

システム中のループ構造に対してループ外から複数の支援がある場合(OR結合)を検討してみる。

図5で示した複数機器で支援された単一機器Cがループ構造を形成した図10の形で一般化できる。図5と同じく起動指令機会が表1と与えられ、時刻 $t_2$ において初めてループ構造が確立する場合を検討する。

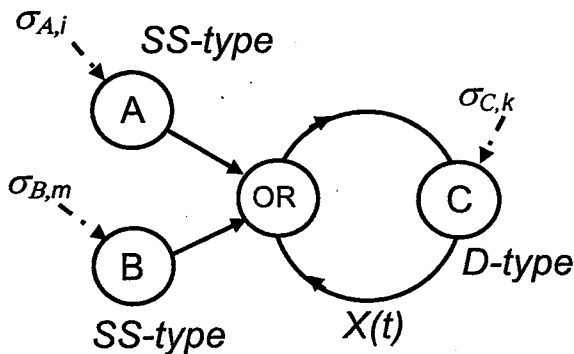


図10 複数支援を受けるループ構造

図10の関係をブール代数式で表現すると、

$$X = C \cdot X + A \cdot C + B \cdot C. \quad (63)$$

となり、(5)式より  $X = mC + AC + BC$  と解が得られる。この式で  $X$  が再帰的に現れる  $CX$  がループ運転状態からの寄与で、 $AC + BC$  は非ループ運転からの寄与であるが、3.5節、(46)式の条件より

$$mC \supseteq A \cdot C, B \cdot C. \quad (64)$$

であるので、 $X = mC$  となる。

任意ブール代数要素 $m$ は、前節で得られた規則によりループ運転成立時の要素A,Bよりの支援事象となる。今の場合、複数の起動指令機会が設定されており、ループ運転が $t_2, t_4, t_7$ と異なった3時刻に開始される。支援事象をそれぞれの時刻に対応して $m_1, m_2, m_3$ とすると、最初の起動指令機会の場合は

$$m_1 = A_0^1(\tau_2). \quad (65)$$

となり、

$$C_0^L(1;t) = A_0^1(\tau_2) \sigma_{C,1} D_{C,1} S_C(\tau_2 - \tau_0) O_C(t - \tau_2). \quad (66)$$

と得られる。第二の起動指令機会に対応した $m_2$ は、

$$m_2 = A_0^1(\tau_4) + B_0^1(\tau_4). \quad (67)$$

であるが、時刻 $t_4$ における新規の機器Cの動作開始は未運転状態事象を対象に考える必要がある。

$$\{A_0^1(\tau_2) + A_0^1(\tau_2) \overline{\sigma_{C,1} D_{C,1}}\} \cdot \sigma_{C,2} D_{C,2} \cdot S_C(\tau_4 - \tau_0) \quad (68)$$

従って  $\Delta C_0^L(2;t)$  は、

$$\Delta C_0^L(2;t) = \{A_0^1(\tau_4) + B_0^1(\tau_4)\} \cdot \{A_0^1(\tau_2) + A_0^1(\tau_2) \overline{\sigma_{C,1} D_{C,1}}\} \cdot \sigma_{C,2} D_{C,2} \cdot S_C(\tau_4 - \tau_0) \cdot O_C(t - \tau_4) \quad (69)$$

となる。

第三の起動指令機会に対応した $m_3$ は

$$m_3 = A_0^1(\tau_7) + A_0^2(\tau_7) + B_0^1(\tau_7) + B_0^2(\tau_7). \quad (70)$$

である。

時刻 $t_7$ における機器Cの未運転状態事象は(36)式から

$$\overline{A_0^1(\tau_4) \cdot B_0^1(\tau_4) + A_0^1(\tau_4) \cdot B_0^1(\tau_4) \cdot \sigma_{C,2} D_{C,2} + A_0^1(\tau_4) \cdot B_0^1(\tau_4) \cdot \sigma_{C,2} D_{C,2}} + A_0^1(\tau_4) \cdot B_0^1(\tau_4) \cdot \sigma_{C,2} D_{C,2} \quad (71)$$

と得られる。従って  $\Delta C_0^L(3;t_7)$  は、

$$\Delta C_0^L(3;t_7) = \{A_0^1(\tau_7) + A_0^2(\tau_7) + B_0^1(\tau_7) + B_0^2(\tau_7)\} \cdot \{A_0^1(\tau_4) \cdot B_0^1(\tau_4) + A_0^1(\tau_4) \cdot B_0^1(\tau_4) \cdot \sigma_{C,2} D_{C,2} + A_0^1(\tau_4) \cdot B_0^1(\tau_4) \cdot \sigma_{C,2} D_{C,2}} \cdot \sigma_{C,3} D_{C,3} \cdot S_C(\tau_7 - \tau_0) \quad (72)$$

となり、最終的に全運転状態事象は、

$$C_0^L(3;t_7) = C_0^L(1;t_7) + \Delta C_0^L(2;t_7) + \Delta C_0^L(3;t_7) \quad (73)$$

と各起動指令機会において確立したループ運転事象の和となっている。

一般に時刻 $t_7$ 以降のループの全運転状態事象は、 $C_0^L(3;t) = A_0^1(\tau_2) \cdot C^1(t)$

$$\begin{aligned} &+ \{A_0^1(\tau_4) + B_0^1(\tau_4) A_0^1(\tau_2) + B_0^2(\tau_4) A_0^1(\tau_2)\} \cdot C^2(t) \\ &+ \{A_0^1(\tau_7) + A_0^2(\tau_7) \cdot \overline{A_0^1(\tau_4) \cdot B_0^1(\tau_4) + B_0^1(\tau_4) \cdot A_0^1(\tau_2) + B_0^2(\tau_4) \cdot A_0^1(\tau_2)}\} \cdot C^3(t) \\ &+ B_0^2(\tau_7) \cdot A_0^1(\tau_2) \cdot \overline{A_0^1(\tau_4) \cdot \sigma_{C,1} D_{C,1} \cdot \sigma_{C,2} D_{C,2} S_C(\tau_7 - \tau_0) O_C(t - \tau_7)} \\ &+ \{B_0^1(\tau_4) A_0^1(\tau_2) + A_0^2(\tau_7) B_0^1(\tau_4) A_0^1(\tau_2)\} \cdot \sigma_{C,2} D_{C,2} S_C(\tau_4 - \tau_0) O_C(t - \tau_4) \\ &+ \{A_0^2(\tau_7) \cdot B_0^1(\tau_4) + B_0^1(\tau_7) \cdot \overline{A_0^1(\tau_2)}\} \cdot \sigma_{C,2} D_{C,2} \cdot \sigma_{C,3} D_{C,3} S_C(\tau_7 - \tau_0) O_C(t - \tau_7) \end{aligned} \quad (73)$$

となる。

複数の起動指令機会が存在する場合でも、個々の

ループ運転の成立時を考えれば、任意ブール代数要素  $m_i$  はループ外部からの支援事象となる。しかし既に運転状態になっている機器を再度運転開始させることはできないので、未運転状態事象に対して起動指令を作用させ、各起動指令機会における新規のループ運転開始事象を求める必要がある。

### 3.9 複数ループが存在する場合

図11の様な形で2個のループ構造が結合されている場合を検討してみる。機器B~EはD-typeの機器とする。各要素には図中に示した時刻に各1回の起動指令機会が与えられているとする。

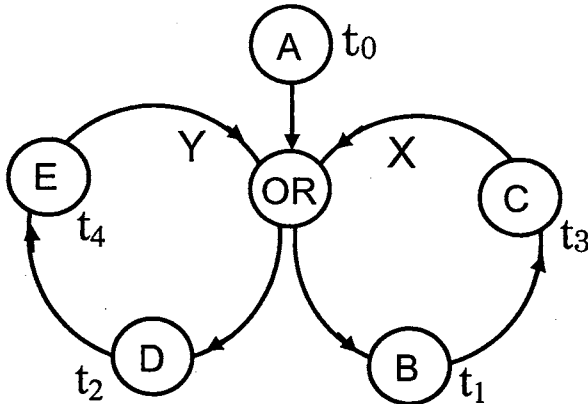


図11 二個のループ構造の結合

図11の関係をブール代数式で表現すると、

$$X = (A + X + Y) \cdot B \cdot C = B \cdot C \cdot X + B \cdot C \cdot Y + A \cdot B \cdot C \quad (74)$$

$$Y = (A + X + Y) \cdot D \cdot E = D \cdot E \cdot X + D \cdot E \cdot Y + A \cdot D \cdot E \quad (75)$$

となり、(5)式を用いると(74)式から  $X$  は、

$$X = m_x \cdot B \cdot C + B \cdot C \cdot Y + A \cdot B \cdot C \quad (76)$$

と求まる。これを(75)式に代入し、(5)式を適用すると、 $Y$  は、

$$Y = m_x \cdot B \cdot C \cdot D \cdot E + m_y \cdot D \cdot E + A \cdot D \cdot E \quad (77)$$

となる。これを再度(76)式に代入すると、

$$X = m_x \cdot B \cdot C + m_y \cdot B \cdot C \cdot D \cdot E + A \cdot B \cdot C \quad (78)$$

と求まる。(64)式と同様の関係、

$$m_x \cdot B \cdot C \supseteq A \cdot B \cdot C, \quad m_y \cdot D \cdot E \supseteq A \cdot D \cdot E \quad (79)$$

を考慮すると、 $X, Y$  は(80)式と得られる。

$$\begin{aligned} X &= m_x \cdot B \cdot C + m_y \cdot B \cdot C \cdot D \cdot E, \\ Y &= m_y \cdot D \cdot E + m_x \cdot B \cdot C \cdot D \cdot E. \end{aligned} \quad (80)$$

ここで、ループが相互に支援し合える構造となっていることから、ループBCへの支援事象  $m_x$  にはループDEの運転状態事象  $m_y \cdot DE$  が含まれている。また、逆に支援事象  $m_y$  には  $m_x \cdot BC$  が含まれている。

$$m_x \supseteq m_y \cdot D \cdot E, \quad m_y \supseteq m_x \cdot B \cdot C \quad (81)$$

それ故、 $X, Y$  は最終的に(82)式と得られる。

$$X = m_x \cdot B \cdot C, \quad Y = m_y \cdot D \cdot E \quad (82)$$

(82)式が(74),(75)式の解となっていることは代入し(79), (81)の関係を考慮すると確認できる。

ループ運転状態形成時の条件をもとに順次時刻順に  $m_x, m_y$  等を決定していくことにより本体系の解析が完了する。

時刻  $t_3$  においてBCループの運転が始まる。

$$m_x = A_0^1(\tau_3) \quad (83)$$

ループDEの運転はこの時点では開始されていないのでAからの支援事象のみとなっている。従って、

$$\begin{aligned} X(t_3) &= A_0^1(\tau_3) \cdot \sigma_{B,1} D_{B,1} S_B(\tau_1 - \tau_0) O_B(t_3 - \tau_1) \\ &\quad \cdot \sigma_{C,1} D_{C,1} S_C(\tau_3 - \tau_0) = A_0^1(\tau_3) B^1(t_3) C^1(t_3). \end{aligned} \quad (84)$$

と得られる。

時刻  $t_4$  においてDEループの運転が開始される。

支援事象  $m_y$  は、

$$m_y = A_0^1(\tau_4) + m_x B^1(\tau_4) C^1(\tau_4) = A_0^1(\tau_4) + A_0^1(\tau_3) B^1(\tau_4) C^1(\tau_4) \quad (85)$$

となる。第2項はループBCからの支援事象である。

これを(82)式に代入すると

$$\begin{aligned} Y(t_4) &= \{A_0^1(\tau_4) + A_0^1(\tau_3) B^1(\tau_4) C^1(\tau_4)\} \cdot D(t_4) \cdot E(t_4) \\ &= A_0^1(\tau_4) D^1(t_4) E^1(t_4) + A_0^1(\tau_3) B^1(\tau_4) C^1(\tau_4) D^1(t_4) E^1(t_4). \end{aligned} \quad (86)$$

と決定される。

もし、ループBCとDEが同時に動作を開始した場合はどうなるかを検討してみる。機器D,Eの動作開始をそれぞれ時刻  $t_1, t_3$  へと早める。

ループ運転が開始される時、他ループからの支援が相互に可能であるとする。時刻  $t_3$  でのループBCの運転開始を考えると、

$$\begin{aligned} m_x &= A_0^1(\tau_3) + Y(\tau_3) = A_0^1(\tau_3) + m_y \cdot D \cdot E \\ &= A_0^1(\tau_3) + A_0^1(\tau_3) \cdot \sigma_{D,1} D_{D,1} S_D(\tau_1 - \tau_0) O_D(\tau_3 - \tau_1) \cdot \sigma_{E,1} D_{E,1} S_E(\tau_3 - \tau_0) \\ &= A_0^1(\tau_3). \end{aligned} \quad (87)$$

となり、

$$\begin{aligned} X(t_3) &= A_0^1(\tau_3) \cdot \sigma_{B,1} D_{B,1} S_B(\tau_1 - \tau_0) O_B(t_3 - \tau_1) \cdot \sigma_{C,1} D_{C,1} S_C(\tau_3 - \tau_0) \\ &= A_0^1(\tau_3) \cdot B^1(t_3) \cdot C^1(t_3). \end{aligned} \quad (88)$$

と得られる。同様にDEループも機器Aからの支援のみで動作を開始した結果となる。

2ループ同時開始の場合は、 $A_0^1(\tau_3)$  からの直接支援に加えての他ループを経由しての支援は部分事象となっているため効果は出ないことになる。

### 3.10 共有部分のある複数ループ

D-typeの機器3つが図12の様な形で結合されていて共有部分Bを持ったループ構造が2つある場合を検討してみる。

Aは初期時刻  $t_0$  から運転状態に置かれており、機器Bは時刻  $t_1, t_3$  に、機器Cは時刻  $t_2, t_5$  に、機器Dは時刻

$t_4, t_6$  にそれぞれ起動指令機会が与えられているとする。まずBCループ、次にBDループが運転状態となった後、それぞれに追加の起動指令が与えられる。

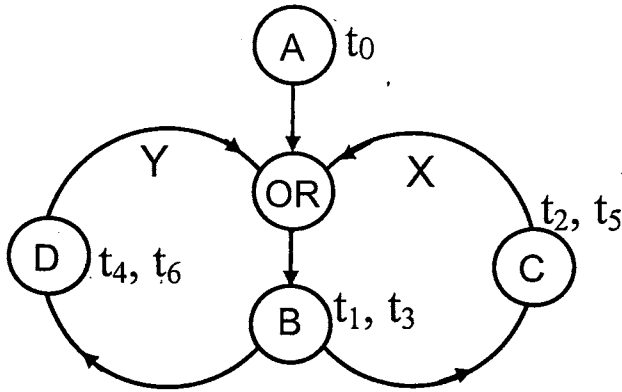


図12 共有部を持つ2個のループ構造

図12の関係をブール代数式で表現すると、

$$X = (A + X + Y) \cdot B \cdot C = B \cdot C \cdot X + B \cdot C \cdot Y + A \cdot B \cdot C. \quad (89)$$

$$Y = (A + X + Y) \cdot B \cdot D = B \cdot D \cdot X + B \cdot D \cdot Y + A \cdot B \cdot D. \quad (90)$$

となり、(5)式を用いると(89)式から $X$ は、

$$X = m_x \cdot B \cdot C + B \cdot C \cdot Y + A \cdot B \cdot C. \quad (91)$$

と求まる。これを(90)式に代入し、(5)式を適用すると、 $Y$ は、

$$Y = m_x \cdot B \cdot C \cdot D + m_y \cdot B \cdot D + A \cdot B \cdot D. \quad (92)$$

となる。これを再度(91)式に代入すると、

$$X = m_x \cdot B \cdot C + m_y \cdot B \cdot C \cdot D + A \cdot B \cdot C. \quad (93)$$

と求まる。(64)式と同様の関係、

$$m_x \cdot B \cdot C \supseteq A \cdot B \cdot C, \quad m_y \cdot B \cdot D \supseteq A \cdot B \cdot D. \quad (94)$$

を考慮すると、 $X, Y$ は(95)式となり、

$$X = m_x \cdot B \cdot C + m_y \cdot B \cdot C \cdot D, \quad (95)$$

$$Y = m_y \cdot B \cdot D + m_x \cdot B \cdot C \cdot D. \quad (95)$$

さらに、(81)式と同様の関係が成立することから、

$X, Y$ は最終的に(96)式と得られる。

$$X = m_x \cdot B \cdot C, \quad (96)$$

$$Y = m_y \cdot B \cdot D. \quad (96)$$

前節と同様にして順次 $m_x, m_y$ 等を決定していく。

時刻 $t_2$ においてBCループの運転が始まる。

$$m_x = A_0^1(\tau_2). \quad (97)$$

ループDEの運転はこの時点では開始されていないので、Aからの支援事象のみとなっている。従って、

$$X(t_2) = m_x \cdot B^1(t_2)C^1(t_2) = A_0^1(\tau_2) \cdot B^1(t_2)C^1(t_2). \quad (98)$$

と得られる。

時刻 $t_3$ に機器Bの追加起動( $A_0(t_3) \cdot B^2(t_3)$ )が行なわれるが、BCループの運転状態には影響しない。

時刻 $t_4$ においてBDループの運転が開始される。

BCループの運転状態事象は、 $A_0(\tau_2) \cdot B^1(t_4)C^1(t_4)$ であるので

$$m_y = A_0^1(\tau_4) + X(\tau_4) = A_0^1(\tau_4) + A_0^1(\tau_2) \cdot B^1(\tau_4)C^1(\tau_4). \quad (99)$$

となる。従ってループBDの運転事象は、

$$\begin{aligned} Y(t_4) &= \{A_0^1(\tau_4) + A_0^1(\tau_2) \cdot B^1(\tau_4)C^1(\tau_4)\} \cdot \{B^1(t_4)D^1(t_4) + B^2(t_4)D^1(t_4)\} \\ &= A_0^1(\tau_4) \cdot B^1(t_4)D^1(t_4) + A_0^1(\tau_2) \cdot C^1(\tau_4) \cdot B^1(t_4)D^1(t_4) \\ &\quad + A_0^1(\tau_4) \cdot B^2(t_4)D^1(t_4). \end{aligned} \quad (100)$$

となる。

時刻 $t_5$ において追加のBCループの運転が開始される。BDループの運転状態から、

$$m_x' = A_0^1(\tau_5) + A_0^1(\tau_4) \cdot B^1(\tau_5)D^1(\tau_5) + A_0^1(\tau_2) \cdot B^2(\tau_5)D^1(\tau_5). \quad (101)$$

となる。第2回目の起動機会であるため $m_x'$ と表記し $m_x$ と区別した。ここで(100)式中の $A_0^1(\tau_2) \cdot C^1(\tau_4) \cdot B^1(\tau_5)D^1(\tau_5)$ に相当する項はBCループ自身からの寄与であるので除外できる。一方、BC側でループ運転状態にならなかった事象は次式で表せられる。

$$\overline{X(\tau_2)} = \overline{A_0^1(\tau_2)B^1(\tau_2)C^1(\tau_2)} = \overline{A_0^1(\tau_2) + B^1(\tau_2) + C^1(\tau_2)}. \quad (102)$$

外部からの支援事象が $A(t)$ 単一で、単調に減少するため(102)式の表現を使用することが可能となっている。

支援事象((101)式)と待機事象((102)式)の積をとると、

$$\begin{aligned} &\{A_0^1(\tau_5) + A_0^1(\tau_4) \cdot B^1(\tau_5)D^1(\tau_5) + A_0^1(\tau_2) \cdot B^2(\tau_5)D^1(\tau_5)\} \\ &\cdot \{\overline{A_0^1(\tau_2) + B^1(\tau_2) + C^1(\tau_2)}\} \\ &= A_0^1(\tau_5) \overline{B^1(\tau_2) + A_0^1(\tau_2)C^1(\tau_2)} + A_0^1(\tau_4) \cdot B^1(\tau_5)D^1(\tau_5) \overline{C^1(\tau_2)} \\ &\quad + A_0^1(\tau_2) \cdot B^2(\tau_5)D^1(\tau_5) \end{aligned} \quad (103)$$

となる。時刻 $t_5$ は機器Cの2回目の起動機会であり、新たにループ運転となる可能性があるのは $B^1(t_5)C^2(t_5)$ と $B^2(t_5)\sigma_{C,2}D_{C,2}S_C(\tau_5 - \tau_0)$ の2種類の組み合わせである。これらを(103)式に掛け合わせる。

その結果、時刻 $t_5$ において新たにループ運転状態となる事象は、

$$\begin{aligned} \Delta X(t_5) &= \{A_0^1(\tau_5) \overline{B^1(\tau_2) + A_0^1(\tau_2)C^1(\tau_2)} + A_0^1(\tau_4) \cdot B^1(\tau_5)D^1(\tau_5) \overline{C^1(\tau_2)} \\ &\quad + A_0^1(\tau_2) \cdot B^2(\tau_5)D^1(\tau_5)\} \cdot \{B^1(t_5) + B^2(t_5)\} \cdot \sigma_{C,2}D_{C,2}S_C(\tau_5 - \tau_0) \\ &= \{A_0^1(\tau_5) + A_0^1(\tau_4) \cdot D^1(\tau_5)\} \cdot B^2(t_5)\sigma_{C,2}D_{C,2}S_C(\tau_5 - \tau_0) \\ &\quad + \{A_0^1(\tau_5) + A_0^1(\tau_4) \cdot D^1(\tau_5)\} \cdot B^1(t_5)C^2(t_5) \end{aligned} \quad (104)$$

と得られる。

時刻 $t_6$ において追加のBDループの運転が開始される。BCループの運転状態から、

$$\begin{aligned} m_y' &= A_0^1(\tau_6) + A_0^1(\tau_5) \cdot B^1(\tau_6)C^1(\tau_6) + A_0^1(\tau_2) \cdot B^1(\tau_6)C^2(\tau_6) \\ &\quad + A_0^1(\tau_2) \cdot B^2(\tau_6)\sigma_{C,2}D_{C,2}S_C(\tau_5 - \tau_0)O_C(\tau_6 - \tau_5) \end{aligned} \quad (105)$$

となる。ここで(104)式中でBDループ自身からの寄与となっている項は除外した。一方、BD側でループ運転状態にならなかった事象は次式で表せられる。

$$\begin{aligned} \overline{Y(\tau_4)} &= \overline{A_0(\tau_4) \cdot B^1(\tau_4) D^1(\tau_4) + A_0(\tau_4) \cdot C^1(\tau_4) \cdot B^1(\tau_4) D^1(\tau_4) + A_0(\tau_4) \cdot B^2(\tau_4) D^1(\tau_4)} \\ &= \overline{A_0(\tau_4) \cdot B^1(\tau_4) D^1(\tau_4) + A_0(\tau_4) \cdot C^1(\tau_4) \cdot B^1(\tau_4) D^1(\tau_4) + A_0(\tau_4) \cdot B^2(\tau_4) D^1(\tau_4)} \quad (106) \\ &= \overline{A_0(\tau_4) + D^1(\tau_4) + A_0(\tau_4) \cdot B^1(\tau_4) + A_0(\tau_4) \cdot C^1(\tau_4)}. \end{aligned}$$

支援事象 ((105)式) と待機事象 ((106)式) の積をとると、

$$\begin{aligned} & \overline{\{A_0(\tau_4) + A_0(\tau_3) \cdot B^1(\tau_3) C^1(\tau_3) + A_0(\tau_3) \cdot B^1(\tau_3) C^2(\tau_3) + A_0(\tau_3) \cdot B^2(\tau_3) \sigma_{c,2} D_{c,2} S_c(\tau_3 - \tau_0) O_c(\tau_3 - \tau_0)\}} \\ & \cdot \overline{\{A_0(\tau_4) + D^1(\tau_4) + A_0(\tau_4) \cdot B^1(\tau_4) + A_0(\tau_4) \cdot C^1(\tau_4)\}} \\ & = \overline{A_0(\tau_4) D^1(\tau_4) + A_0(\tau_3) B^1(\tau_3) \cdot C^1(\tau_3) \cdot D^1(\tau_4) + A_0(\tau_3) \cdot B^1(\tau_3) C^2(\tau_3) \cdot D^1(\tau_4)} \\ & \quad + \overline{A_0(\tau_3) \cdot B^2(\tau_3) D^1(\tau_4) \sigma_{c,2} D_{c,2} S_c(\tau_3 - \tau_0) O_c(\tau_3 - \tau_0)} \quad (107) \end{aligned}$$

となる。時刻  $t_6$  は機器Dの2回目の起動機会であり、新たにループ運転となる可能性があるのは  $B^1(t_6) D^1(t_6)$  と  $B^2(t_6) D^1(t_6)$  である。

その結果、時刻  $t_6$  において新たにループ運転状態となる事象は、

$$\begin{aligned} \Delta Y(t_6) &= \overline{A_0(t_6) D^1(t_6) + A_0(t_6) B^1(t_6) \cdot C^1(t_6) \cdot D^1(t_6) + A_0(t_6) \cdot B^1(t_6) C^2(t_6) D^1(t_6)} \\ & \quad + \overline{A_0(t_6) \cdot B^2(t_6) D^1(t_6) \sigma_{c,2} D_{c,2} S_c(t_6 - \tau_0) O_c(t_6 - \tau_0)} \cdot \overline{\{B^1(t_6) + B^2(t_6)\} \cdot D^1(t_6)} \\ & = \overline{\{A_0(t_6) + A_0(t_6) C^1(t_6) + A_0(t_6) C^2(t_6)\} \cdot B^1(t_6) D^1(t_6)} \\ & \quad + \overline{\{A_0(t_6) + A_0(t_6) \cdot \sigma_{c,2} D_{c,2} S_c(t_6 - \tau_0) O_c(t_6 - \tau_0)\} \cdot B^2(t_6) D^1(t_6)}. \quad (108) \end{aligned}$$

と得られる。

以上の結果から時刻  $t_6$  以降の  $X, Y$  は以下の様になる。

$$\begin{aligned} X(t) &= \overline{A_0(t_6) \cdot B^1(t) C^1(t) + \{A_0(t_6) + A_0(t_6) \cdot D^1(t_6)\} \cdot B^1(t) C^2(t)} \\ & \quad + \overline{\{A_0(t_6) + A_0(t_6) \cdot D^1(t_6)\} \cdot B^2(t) \sigma_{c,2} D_{c,2} S_c(t_6 - \tau_0)} \quad (109) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(t) &= \overline{\{A_0(t_6) + A_0(t_6) \cdot C^1(t_6)\} \cdot B^1(t) D^1(t) + A_0(t_6) \cdot B^2(t) D^1(t)} \\ & \quad + \overline{\{A_0(t_6) + A_0(t_6) C^1(t_6) + A_0(t_6) C^2(t_6)\} \cdot B^1(t) D^2(t)} \\ & \quad + \overline{\{A_0(t_6) + A_0(t_6) \cdot \sigma_{c,2} D_{c,2} S_c(t_6 - \tau_0) O_c(t_6 - \tau_0)\} \cdot B^2(t) D^2(t)}. \quad (110) \end{aligned}$$

### 3.11 ループ構造を持ったシステムの解法

前節までのループ構造の動作状態に関する検討の結果、ループ構造の運転状態事象は、ループを構成する機器だけでなく、ループ運転状態が成立した時点でのループ外からの支援事象に依存している事がわかった。

機器の出力がループ構造により一巡し自身の入力となる事により運転状態が維持するという事は、ループを構成する機器全てがD-typeであることにほかならない。そのため、初期状態として待機状態に置かれたループ構造は、そのままでは決して運転を開始することはできない。それ故、SS-type機器からの支援によりループの運転状態が成立するとともに、その時のSS-type機器の支援事象がループ運転状態事象に直接的に関与している。

システム構造を表現したブール代数方程式を解いた時出てくる  $mAB$  等のループ構造に対応した項の任意ブール代数要素  $m$  は、ブール代数式の解としては何であっても元の式を満たすが、ループの現実

の運転状態を現わすためにはループ運転成立時の外部からの支援事象である必要がある。

以上の事から、ループ構造を持ったシステムの解析手順をまとめると以下の様になる。

- (1) システムの構造を信頼性ブロック図として表現する。
- (2) システム構造を各要素の動作状態事象及び出力事象間のブール代数の関係式で表現する。
- (3) ループ構造が存在するシステムの場合は未知要素を含んだ(1)式の形に整理できる。
- (4) (5)式, (7)式の公式に基づき未知ブール代数要素  $X$  を任意ブール代数要素  $m$  を含んだ式として求める。
- (5) 任意ブール代数要素  $m$  を含む項がループ構造に対応していること、含まない項が非ループ構造からの寄与であることを確認する。
- (6) ループ運転状態が開始される時刻におけるそのループへの支援事象を任意要素  $m$  とする。順次時刻順にループ運転事象を決定していく。その際、新規にループ運転状態となる事象を算出することに留意する。他ループが既に運転状態となっている場合は、そこからの支援も考慮に入れる。

### 3.12 解析実施例

前節までに求めた解析手順の理解のため、図13に示すサンプルシステムを解析してみる。

外部からの燃料補給に加えて、システム内で燃料を自身で供給しエンジンの運転を継続可能としている。発電した電力を外部へ給電するとともに内部のポンプの電力としても使用するシステムである。

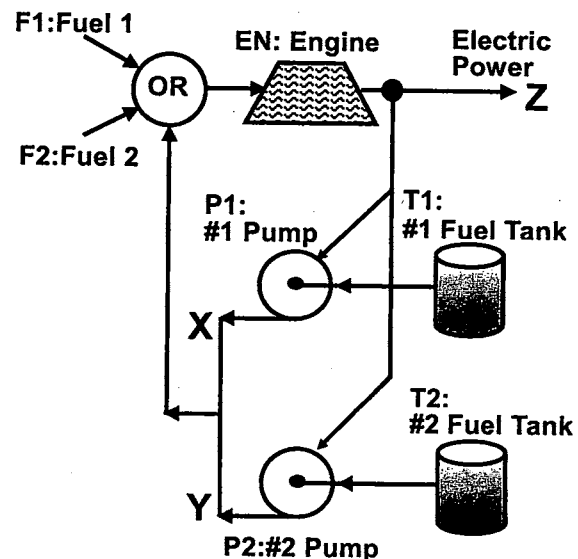


図13 サンプルシステム

外部供給の燃料1(F1)は初期時刻 $t_0$ から存在し、時刻 $t_1$ にエンジン(EN)を起動させる。その後時刻 $t_2$ にポンプ1(P1)を、時刻 $t_3$ にポンプ2(P2)を起動させる。タンク1(T1)、タンク2(T2)は初期時刻 $t_0$ から燃料供給が開始されているとする。その後追加の燃料供給2(F2)を時刻 $t_4$ に開始する。F2の供給開始後時刻 $t_5$ に、起動には到らず待機状態に置かれていたENの追加の起動を試みる。最後に時刻 $t_6$ において、これも起動には到らず待機状態に置かれていたP1,P2の起動を試み、追加のループ運転を開始する。

ENの運転には燃料の供給が必須で、P1,P2の運転には電力と燃料の供給が必須となる。機器F1,F2, T1,T2はSS-type, EN,P1,P2はD-typeとなっている。

P1,P2からの燃料供給事象をそれぞれX,Yとしてこのシステムをブール式で表現すると、

$$X = \{F1 + F2 + X + Y\} \cdot EN \cdot P1 \cdot T1. \quad (111)$$

$$Y = \{F1 + F2 + X + Y\} \cdot EN \cdot P2 \cdot T2. \quad (112)$$

となる。(5)式に従ってXを求めると、

$$X = \{F1 + F2\} \cdot EN \cdot P1 \cdot T1 + m_x \cdot EN \cdot P1 \cdot T1 + Y \cdot EN \cdot P1 \cdot T1. \quad (113)$$

となる。

これを(112)式に代入し、再度(5)式に従ってYを求めると、

$$Y = m_y \cdot EN \cdot P2 \cdot T2 + m_x \cdot EN \cdot P1 \cdot T1 \cdot P2 \cdot T2. \quad (114)$$

となり、これを(112)式に代入して、

$$X = m_x \cdot EN \cdot P1 \cdot T1 + m_y \cdot EN \cdot P1 \cdot T1 \cdot P2 \cdot T2. \quad (115)$$

が得られる。さらに、(81)式と同様の関係が成立することから、X,Yは最終的に(116)式と得られる。

$$X = m_x \cdot EN \cdot P1 \cdot T1, \quad (116)$$

$$Y = m_y \cdot EN \cdot P2 \cdot T2.$$

外部への給電事象Zは非ループ部分からの寄与

$\{F1 + F2\} \cdot EN$  を加えると次式のようになる。

$$Z = \{F1 + F2\} \cdot EN + m_x \cdot EN \cdot P1 \cdot T1 + m_y \cdot EN \cdot P2 \cdot T2. \quad (117)$$

時刻 $t_2$ にEN-P1ループの運転が確立するので、その時の支援事象から、

$$m_x = F1(\tau_2). \quad (118)$$

となり、時刻 $t_2$ における給電事象 $Z(t_2)$ は、

$$Z(t_2) = F1(t_2) \cdot EN^1(t_2) + F1(\tau_2) \cdot EN^1(t_2) \cdot P1^1(t_2) \cdot T1(t_2) \\ = F1(t_2) \cdot \sigma_{EN,1} D_{EN,1} S_{EN}(\tau_1 - \tau_0) O_{EN}(t_2 - \tau_1) \\ + F1(\tau_2) \cdot \sigma_{EN,1} D_{EN,1} S_{EN}(\tau_1 - \tau_0) O_{EN}(t_2 - \tau_1) \cdot \sigma_{P1,1} D_{P1,1} S_{P1}(\tau_2 - \tau_0) T1(t_2) \quad (119)$$

となる。(117)式から(119)式を求めるとき、時刻 $t_2$ において動作していない項は除いた。また、F1,T1は初期時刻 $t_0$ から動作しており追加の動作開始事象は存在しないので、起動機会回数を示す上付きの"1"は省略してある。

時刻 $t_3$ においてEN-P2ループの運転が確立する。その時の支援事象から、

$$m_y = F1(\tau_3) + m_x \cdot EN^1(\tau_3) \cdot P1^1(\tau_3) \cdot T1(\tau_3). \quad (120)$$

となる。第2項は既に運転状態にあるEN-P1ループからの支援事象であり、確定事象として与える。

時刻 $t_3$ における給電事象 $Z(t_3)$ は、

$$Z(t_3) = F1(t_3) \cdot EN^1(t_3) + F1(\tau_2) \cdot EN^1(t_3) \cdot P1^1(t_3) \cdot T1(t_3) \\ + F1(\tau_3) \cdot EN^1(t_3) \cdot P2^1(t_3) \cdot T2(t_3) \\ + F1(\tau_2) \cdot P1^1(\tau_3) \cdot T1(\tau_3) \cdot EN^1(t_3) \cdot P2^1(t_3) \cdot T2(t_3) \quad (121)$$

となる。

F2の供給開始及びENの2回目の起動機会後、時刻 $t_5$ における非ループ部からの給電事象(Z)への寄与は、3.4節で検討した $C_O(2;t_4)$ と同等で以下のようになる。

$$F1(t_5) EN^1(t_5) + F2(t_5) F1(\tau_4) EN^1(t_5) + F1(t_5) EN^2(t_5) + F2(t_5) \cdot F1(\tau_4) EN^2(t_5) \\ + F2(t_5) \cdot \overline{F1(\tau_4)} \sigma_{EN,2} D_{EN,2} S_{EN}(\tau_4 - \tau_0) O_{EN}(t_5 - \tau_4) \quad (122)$$

3.5節の検討からわかるように、既に運転状態となっているループ部へはF2の供給開始、ENの追加の起動はこの時点では影響を及ぼさない。

起動されず待機状態に置かれていたP1, P2の起動が時刻 $t_6$ において行なわれ、EN-P1ループ及びEN-P2ループの追加の動作が始まる。

時刻 $t_6$ におけるEN-P1ループ開始時の支援事象は、

$$m'_x = F1(\tau_6) + F2(\tau_6) + F1(\tau_3) \cdot EN^1(\tau_6) \cdot P2^1(\tau_6) \cdot T2(\tau_6). \quad (123)$$

となる。なお、既に起動しているP1を含んだEN-P1ループからの支援は考慮する必要がない。

ここで、第1回目の起動機会にループ運転が開始しなかった事象は、

$$\overline{F1(\tau_1)} + F1(\tau_1) \sigma_{EN,1} D_{EN,1} + F1(\tau_1) \overline{F1(\tau_2)} \sigma_{EN,1} D_{EN,1} \\ + F1(\tau_2) \sigma_{EN,1} D_{EN,1} \sigma_{P1,1} D_{P1,1} \quad (124)$$

である。なお、第3項 $F1(\tau_1) \overline{F1(\tau_2)} \sigma_{EN,1} D_{EN,1}$ はENの運転開始後、燃料の供給が停止し運転が停止した場合に相当している。3.3節で述べた仮定により、再度の起動は考えないこととして以降この項は除外する。

支援事象((123)式)と待機状態事象((124)式)の積をとると、

$$\{F1(\tau_6) + F2(\tau_6) + F1(\tau_3) \cdot EN^1(\tau_6) \cdot P2^1(\tau_6) \cdot T2(\tau_6)\} \\ \cdot \{F1(\tau_1) + F1(\tau_1) \sigma_{EN,1} D_{EN,1} + F1(\tau_2) \sigma_{EN,1} D_{EN,1} \sigma_{P1,1} D_{P1,1}\} \\ = \{F1(\tau_6) + F1(\tau_1) F2(\tau_6)\} \cdot \sigma_{EN,1} D_{EN,1} + \overline{F1(\tau_1)} F2(\tau_6) + F1(\tau_6) \sigma_{EN,1} D_{EN,1} \sigma_{P1,1} D_{P1,1} \\ + F1(\tau_4) F2(\tau_6) \sigma_{EN,1} D_{EN,1} \sigma_{P1,1} D_{P1,1} \\ + F1(\tau_3) \cdot EN^1(\tau_6) \cdot P2^1(\tau_6) \cdot T2(\tau_6) \cdot \sigma_{EN,1} D_{EN,1} \sigma_{P1,1} D_{P1,1}. \quad (125)$$

となる。時刻 $t_6$ においてEN-P1ループの運転状態が開始する可能性のある $EN \cdot P1 \cdot T1$ に対応した事象は、

$$\sigma_{EN,1} D_{EN,1} S_{EN}(\tau_1 - \tau_0) O_{EN}(t_6 - \tau_1) \cdot \sigma_{P1,2} D_{P1,2} S_{P1}(\tau_6 - \tau_0) \cdot T1(t_6) \\ + \sigma_{EN,2} D_{EN,2} S_{EN}(\tau_5 - \tau_0) O_{EN}(t_6 - \tau_5) \cdot \sigma_{P1,2} D_{P1,2} S_{P1}(\tau_6 - \tau_0) \cdot T1(t_6) \quad (126)$$

となっている。(125)式と(126)式の積により第2回目

の起動機会 (時刻 $t_6$ ) において開始されるEN-P1ループの動作事象が得られる。その際、(125)式の第1,2項はEN,P1共に待機状態に置かれた状態に対応し、第3~6項はENは第1回目の起動指令で起動したが、P1は起動しなかった場合であることを考慮する。

$$\begin{aligned} \Delta X(t_6) = & \{ \{ F1(\tau_6) + F1(\tau_1)F2(\tau_6) \} \cdot \overline{\sigma_{EN,1}D_{EN,1}} + \overline{F1(\tau_1)F2(\tau_6)} \} \\ & \cdot \sigma_{EN,2}D_{EN,2}S_{EN}(\tau_5 - \tau_0)O_{EN}(t_6 - \tau_5) \cdot \sigma_{P1,2}D_{P1,2}S_{P1}(\tau_6 - \tau_0) \cdot T1(t_6) \\ & + \{ F1(\tau_6)\sigma_{EN,1}D_{EN,1}\overline{\sigma_{P1,1}D_{P1,1}} + F1(\tau_2)F2(\tau_6)\sigma_{EN,1}D_{EN,1}\overline{\sigma_{P1,1}D_{P1,1}} \\ & + F1(\tau_3) \cdot EN^1(\tau_6) \cdot P2^1(\tau_6) \cdot T2(\tau_6) \cdot \sigma_{EN,1}D_{EN,1}\overline{\sigma_{P1,1}D_{P1,1}} \} \\ & \cdot S_{EN}(\tau_1 - \tau_0)O_{EN}(t_6 - \tau_1) \cdot \sigma_{P1,2}D_{P1,2}S_{P1}(\tau_6 - \tau_0) \cdot T1(t_6). \end{aligned} \quad (127)$$

展開して整理すると、

$$\begin{aligned} \Delta X(t_6) = & \{ F1(\tau_6) + F1(\tau_1)F2(\tau_6) \} \cdot EN^2(t_6) \cdot \sigma_{P1,2}D_{P1,2}S_{P1}(\tau_6 - \tau_0) \cdot T1(t_6) \\ & + \overline{F1(\tau_1)F2(\tau_6)} \cdot \sigma_{EN,2}D_{EN,2}S_{EN}(\tau_5 - \tau_0)O_{EN}(t_6 - \tau_5) \cdot \sigma_{P1,2}D_{P1,2}S_{P1}(\tau_6 - \tau_0) \cdot T1(t_6) \\ & + \{ F1(\tau_6) + F1(\tau_2)F2(\tau_6) + F1(\tau_3) \cdot P2^1(\tau_6) \cdot T2(\tau_6) \} \cdot EN^1(t_6) \cdot P1^2(t_6) \cdot T1(t_6). \end{aligned} \quad (128)$$

と得られる。

同様に、時刻 $t_6$ におけるEN-P2ループ開始時の支援事象は、

$$m'_y = F1(\tau_6) + F2(\tau_6) + F1(\tau_2) \cdot EN^1(\tau_6) \cdot P1^1(\tau_6) \cdot T1(\tau_6). \quad (129)$$

となる。

ここで、第1回目の起動機会経過時にループ運転が開始しなかったEN-P2ループに関する事象は、

$$\overline{F1(\tau_1)} + F1(\tau_1)\overline{\sigma_{EN,1}D_{EN,1}} + F1(\tau_3)\sigma_{EN,1}D_{EN,1}\overline{\sigma_{P2,1}D_{P2,1}} \quad (130)$$

である。支援事象 ((129)式) と待機状態事象 ((130)式) の積をとると、

$$\begin{aligned} \Delta Y(t_6) = & \{ F1(\tau_6) + F2(\tau_6)F1(\tau_1) \} \cdot EN^2(t_6) \cdot \sigma_{P2,2}D_{P2,2}S_{P2}(\tau_6 - \tau_0) \cdot T2(t_6) \\ & + \overline{F1(\tau_1)F2(\tau_6)} \cdot \sigma_{EN,2}D_{EN,2}S_{EN}(\tau_5 - \tau_0)O_{EN}(t_6 - \tau_5) \cdot \sigma_{P2,2}D_{P2,2}S_{P2}(\tau_6 - \tau_0) \cdot T2(t_6) \\ & + \{ F1(\tau_6) + F1(\tau_2)F2(\tau_6) + F1(\tau_3) \cdot P1^1(\tau_6) \cdot T1(\tau_6) \} \cdot EN^1(t_6) \cdot P2^2(t_6) \cdot T2(t_6) \\ = & \{ F1(\tau_6) + F2(\tau_6)F1(\tau_1) \} \cdot \overline{\sigma_{EN,1}D_{EN,1}} + \overline{F1(\tau_1)F2(\tau_6)} + F1(\tau_6)\sigma_{EN,1}D_{EN,1}\overline{\sigma_{P2,1}D_{P2,1}} \\ & + F1(\tau_3)F2(\tau_6)\sigma_{EN,1}D_{EN,1}\overline{\sigma_{P2,1}D_{P2,1}} \\ & + F1(\tau_2) \cdot EN^1(\tau_6) \cdot P2^1(\tau_6) \cdot T2(\tau_6)\sigma_{EN,1}D_{EN,1}\overline{\sigma_{P2,1}D_{P2,1}}. \end{aligned} \quad (131)$$

となる。新たにループ運転となる可能性の事象、

$$\begin{aligned} & \sigma_{EN,1}D_{EN,1}S_{EN}(\tau_1 - \tau_0)O_{EN}(t_6 - \tau_1) \cdot \sigma_{P2,2}D_{P2,2}S_{P2}(\tau_6 - \tau_0) \cdot T2(t_6) \\ & + \sigma_{EN,2}D_{EN,2}S_{EN}(\tau_5 - \tau_0)O_{EN}(t_6 - \tau_5) \cdot \sigma_{P2,2}D_{P2,2}S_{P2}(\tau_6 - \tau_0) \cdot T2(t_6) \end{aligned} \quad (132)$$

を掛けて整理すると、第2回目の起動機会 (時刻 $t_6$ ) において開始されるEN-P2ループの動作事象は、

$$\begin{aligned} \Delta Y(t_6) = & \{ F1(\tau_6) + F2(\tau_6)F1(\tau_1) \} \cdot EN^2(t_6) \cdot \sigma_{P2,2}D_{P2,2}S_{P2}(\tau_6 - \tau_0) \cdot T2(t_6) \\ & + \overline{F1(\tau_1)F2(\tau_6)} \cdot \sigma_{EN,2}D_{EN,2}S_{EN}(\tau_5 - \tau_0)O_{EN}(t_6 - \tau_5) \cdot \sigma_{P2,2}D_{P2,2}S_{P2}(\tau_6 - \tau_0) \cdot T2(t_6) \\ & + \{ F1(\tau_6) + F1(\tau_2)F2(\tau_6) + F1(\tau_3) \cdot P1^1(\tau_6) \cdot T1(\tau_6) \} \cdot EN^1(t_6) \cdot P2^2(t_6) \cdot T2(t_6). \end{aligned} \quad (133)$$

となる。

最終的に時刻 $t_6$ における出力事象Zは非ループ部からの寄与 (122式)、時刻 $t_2$ に開始されたEN-P1ループ部からの寄与、時刻 $t_3$ に開始されたEN-P2ループ部からの寄与、時刻 $t_6$ に開始されたEN-P1ループ部

からの寄与 (128式) 及び時刻 $t_6$ に開始されたEN-P2ループ部からの寄与 (133式) の和となる。

$$\begin{aligned} Z(t_6) = & \{ F1(t_6) + F2(t_6)F1(\tau_1) \} EN^2(t_6) + \{ F1(t_6) + F2(t_6) \cdot F1(\tau_1) \} EN^2(t_6) \\ & + F2(t_6) \cdot \overline{F1(\tau_1)} \cdot \sigma_{EN,2}D_{EN,2}S_{EN}(\tau_5 - \tau_0)O_{EN}(t_6 - \tau_5) \\ & + F1(\tau_2) \cdot EN^1(t_6) \cdot P1^1(t_6) \cdot T1(t_6) \\ & + F1(\tau_3) \cdot EN^1(t_6) \cdot P2^1(t_6) \cdot T2(t_6) \\ & + F1(\tau_2) \cdot P1^1(\tau_3) \cdot T1(\tau_3) \cdot EN^1(t_6) \cdot P2^1(t_6) \cdot T2(t_6) \\ & + \{ F1(\tau_6) + F1(\tau_1)F2(\tau_6) + F1(\tau_2) \cdot P2^1(\tau_6) \cdot T2(\tau_6) \} \cdot EN^1(t_6) \cdot P1^2(t_6) \cdot T1(t_6) \\ & + \{ F1(\tau_6) + F1(\tau_1)F2(\tau_6) + F1(\tau_2) \cdot P1^1(\tau_6) \cdot T1(\tau_6) \} \cdot EN^1(t_6) \cdot P2^2(t_6) \cdot T2(t_6) \\ & + \{ F1(\tau_6) + F1(\tau_1)F2(\tau_6) \} \cdot EN^2(t_6) \cdot \sigma_{P1,2}D_{P1,2}S_{P1}(\tau_6 - \tau_0) \cdot T1(t_6) \\ & + \{ F1(\tau_6) + F1(\tau_1)F2(\tau_6) \} \cdot EN^2(t_6) \cdot \sigma_{P2,2}D_{P2,2}S_{P2}(\tau_6 - \tau_0) \cdot T2(t_6) \\ & + \overline{F1(\tau_1)F2(\tau_6)} \cdot \sigma_{EN,2}D_{EN,2}S_{EN}(\tau_5 - \tau_0)O_{EN}(t_6 - \tau_5) \cdot \sigma_{P1,2}D_{P1,2}S_{P1}(\tau_6 - \tau_0) \cdot T1(t_6) \\ & + \overline{F1(\tau_1)F2(\tau_6)} \cdot \sigma_{EN,2}D_{EN,2}S_{EN}(\tau_5 - \tau_0)O_{EN}(t_6 - \tau_5) \cdot \sigma_{P2,2}D_{P2,2}S_{P2}(\tau_6 - \tau_0) \cdot T2(t_6). \end{aligned} \quad (134)$$

第1項から第3項までは非ループ構造により電力が供給されている事象を表している。第1項は、ENの1回目の起動機会において運転を開始した事象、第2,3項は2回目の起動機会において運転を開始した事象。

第4項は、EN-P1ループに属するP1が第1回目の起動機会に運転を開始し、運転状態となった事象である。第5,6項はEN-P2ループが時刻 $t_3$ に運転状態となった事象である。特に第6項はEN-P1ループの支援のもとEN-P2ループが運転状態となった事象である。

第7項は、第1回目の起動機会に運転状態となっていたENと第2回目の起動機会 (時刻 $t_6$ ) に運転開始したP1の組み合わせにより運転状態となったEN-P1ループを表している。第7項中の第1番目はF1の支援で非ループ運転状態にあったENと、第2番目は途中からF2の支援で運転状態が維持されていたENと、第3番目はEN-P2ループの構成機器として運転状態が維持されていたENとP1との組み合わせにそれぞれ対応している。

第8項は、EN-P2ループについての同様の事象を表している。

第9項は、支援事象があるにもかかわらず第1回目の起動機会に運転状態にならなかったエンジンと時刻 $t_6$ で初めて起動を試み運転を開始したP1との組み合わせで運転状態となったEN-P1ループを表している。第9項中第1番目はF1の支援で、第2番目はF2の支援でループ運転が開始された事象に対応している。第10項は、EN-P2ループについての同様の事象を表している。

第11,12項は第1回目の起動機会においてF1の支援がなくループ運転開始が試みられなかった場合である。時刻 $t_6$ で、F2の支援のもと、EN, P1, P2とも初めて起動を試み、運転状態を達成した事象を表して

いる。

図13に示す比較的単純なシステムでも、ループ構造が存在していると、ループの自立運転、ループ相互間の支援の効果により、システムの出力量は種々の要素の和から構成される複雑な事象となる事がわかる。

### 3.13 各項の寄与割り合いの検討

前節で得られた(134)式中のパラメータに具体的な数値を代入して、運転状態へそれぞれの事象がどのような割り合いで寄与しているかを調べてみる。

故障率・起動失敗確率としては表2に示す値を用いた。表に見られるように、起動指令と起動成功事象を一体( $\sigma D$ )とし、全ての機器に対して0.95の確率を与えた。事象がわかりやすく理解できるため、通常の信頼度よりやや低い値を用いている。また、ループの効果が明確に出る様に、F1, F2の燃料供給に比較してEN(エンジン), P1, P2(ポンプ)側の信頼度を高く設定してある。時刻は  $t_0$  から  $t_6$  までをそれぞれ10時間の等間隔とした。

表2 設定した故障率等

機器	$\sigma D$	$\lambda s$	$\lambda o$
燃料系; F1, F2	0.95	0.003/h	0.01/h
タンク; T1, T2	0.95	—	0.003/h
エンジン; EN	0.95	0.001/h	0.003/h
ポンプ; P1, P2	0.95	0.001/h	0.003/h

表3に、第1項から第12項までの時刻  $t_6$  (システム動作開始60時間後)における電力供給事象(図13におけるZ)を構成する各項の発生確率を示す。表中、「F1欠如」とあるのはENの1回目の起動機会においてF1の支援が存在せず、ENが運転状態にならなかった事象を意味している。

表4は、主要事象毎に分類した場合の各事象の発生確率をまとめたものである。

これらの結果からみると、ループ構造が存在することにより発生する運転状態事象からの寄与が、非ループ運転に比較して場合によっては大きくなる事がわかる。更に、ループ運転相互の支援等、従来注意が払われていなかった運転状態事象からの寄与も無視できない場合がある事がわかる。

表3 各項の発生確率(時刻 $t_6$ )

項	意味	事象発生確率
1	非ループ運転, ENは1回目機会における起動	0.4865
2	非ループ運転, ENは2回目機会における起動	0.0328
3	非ループ運転, F1欠如の場合	0.0849
4	EN-P1ループ運転, EN, P1とも1回目起動機会における起動	0.4126
5	EN-P2ループ運転, EN, P2とも1回目起動機会における起動	0.3809
6	EN-P2ループ運転, 但しEN-P1ループの支援によりループ運転開始	0.3303
7	EN-P1ループ, P1は2回目機会における起動	0.0207
8	EN-P2ループ, P2は2回目機会における起動	0.0191
9	EN-P1ループ, EN, P1とも2回目起動機会における起動	0.0235
10	EN-P2ループ, EN, P2とも2回目起動機会における起動	0.0233
11	EN-P1ループ運転, F1欠如の場合	0.0603
12	EN-P2ループ運転, F1欠如の場合	0.0603

表4 各事象発生確率(時刻 $t_6$ )

電力供給確率(Z)				
0.7236				
非ループ運転		ループ運転		
0.6042		0.6700		
F1支援有	F1欠如	EN-P1	EN-P2	F1欠如
0.5193	0.0849	0.4573	0.4555	0.0778

### 3.14 シミュレーション結果との比較

本論文で提案するブール代数式を用いた解法の妥当性を検討するため、シミュレーション解析を実施し比較した。シミュレーション対象として図13で与えたサンプルシステムを選び、パラメータの数値は前節と同一とした。

ここでループ運転状態を含んだシステムのアベイラビリティ評価のシミュレーション方法について単純なシステムを使い説明する。

図2で示した最も単純な単一ループシステムを取り上げる。図中の機器に対して、それぞれ、A→F1, B→EN, C→P1と図13の中に現れる機器を対応させる。但し、タンクT1は常時燃料供給可能とし解析対



象から除外して簡略化した。各機器の起動時刻もサンプルシステムの場合と同一とした。解析は乱数を用いたモンテカルロシミュレーションを基本としている。

シミュレーションにおいては初期時刻  $t_0$  から最終時刻  $t_6$  までのシステムの動作推移に対応して表5に示す様に3つの時間間隔と2つの時刻をあらかじめ設定した。それぞれの時間間隔・時刻における機器の故障発生・起動失敗を乱数を用いて確率的に判定する方法を取った。

表5に沿ってシミュレーション手順の説明行なうと以下の様になる。

表5 シミュレーション手順

時刻	機器	乱数	機器状態	入出力状態	機器	乱数	機器状態	出力状態
$t_0 \Rightarrow t_1$	F1	0.588424	1	1	EN	0.8158866	1	0
				0	P1	0.3023133	1	
$t_1$	F1		1	1	EN	0.5781545	1	1
				0	P1		1	
$t_1 \Rightarrow t_2$	F1	0.714184	1	1	EN	0.3017066	1	1
				0	P1	0.2394415	1	
$t_2$	F1		1	1	EN		1	1
				1	P1	0.0077413	1	
$t_2 \Rightarrow t_6$	F1	0.892688	0	1	EN	0.1944425	1	1
				1	P1	0.2670511	1	
ループ運転の有無				1	非ループ運転の有無			
					システム運転の有無			
					1			

時刻欄第一行目  $t_0 \Rightarrow t_1$  はシステム動作開始から時刻  $t_1$  (10時間) までの事象を扱う事を意味している。F1の右横の乱数により、この間のF1の健全性を判断する。

$$F1(t_1) = \sigma_{F1} D_{F1} O_{F1}(t_1 - t_0),$$

$$\Pr(F1(t_1)) = \Pr(\sigma_{F1} D_{F1}) \cdot \Pr(O_{F1}(t_1 - t_0))$$

$$= 0.95 \times \exp(-0.01 \times 10) = 0.859596 \quad (135)$$

であることから、乱数がこの値より大となった時を故障発生として機器状態を "0" と表記する。表5の場合では故障が発生せず機器状態は健全 ("1") となっている。

さらに右隣の入出力欄によりENへの入力の有無を表現している。時刻  $t_1$  の場合はF1の機器が正常であればENへの入力が存在する様に設定してある。

ENの右隣の乱数によりENの待機中の故障発生を判定する。待機中であることから、

$$EN(t_1) = S_{EN0}(t_1 - t_0),$$

$$\Pr(EN(t_1)) = \Pr(S_{EN0}) \cdot \Pr(S_{EN}(t_1 - t_0))$$

$$= 1.0 \times \exp(-0.001 \times 10) = 0.99005 \quad (136)$$

F1と同様に、乱数がこの値 (0.99005) より大となった時を故障発生として機器状態を "0" と表記する。ENは時刻  $t_1$  において起動指令が与えられるので時刻  $t_1$  の直前においてはENは動作しておらず、従ってENの出力状態は常に無し ("0") としてある。

P1の待機中の故障発生もF1、ENと同様の方法でP1の右隣の乱数により判定する。P1は時刻  $t_2$  において起動指令が与えられるのでP1も動作しておらず、従ってP1の“左隣”の入出力状態もこの場合常に "0" となる。

次の時刻  $t_1$  欄においてENの起動事象を判定している。F1の機器状態は  $t_0 \Rightarrow t_1$  の時間進展後の状態のままであるので乱数はいらず、直前の機器状態がそのまま使われている。ENへの入力状態はF1の機器状態とENが起動する直前 (時刻  $t_1$ ) でのP1の状態のOR結合としている。  $\Pr(\sigma_{EN} D_{EN}) = 0.95$  であることから、ENの右の乱数が0.95より大となった時にはENの起動失敗と判定する。ENの出力状態は、ENへの入力状態があり、ENの過去における待機状態の健全性および起動の成功が全て満たされた時 (いずれの状態も "1" の場合) に限り「有り ("1")」となる様に設定されている。他の機器の状態も同様に過去の全ての状態を考慮して判定している。P1の状態はENの起動前後において変化しないので、乱数はいらず直前の状態をそのまま使う。P1はこの時点ではまだ起動されていないので入出力状態欄は "0" と設定されている。

次の時刻欄  $t_1 \Rightarrow t_2$  においても、時間経過  $t_0 \Rightarrow t_1$  で実施したのと同様な方法で、各機器の時間経過にともなう故障発生を判定している。この表の場合、F1、EN、P1ともに故障は発生していない。P1の出力状態は依然として "0" のままである。

次の時刻欄  $t_2$  でP1の起動の成否がENの起動成否の判定と同様にして乱数を使って判定される。P1の出力状態は、ENの出力状態 (=P1への入力状態) が "1" でP1の機器状態が "1" の場合に "1" となるように設定されている。表5の場合、P1が起動に成功したので出力状態は初めて "1" となっている。

次の時刻欄  $t_2 \Rightarrow t_6$  でも、 $t_0 \Rightarrow t_1$ 、 $t_1 \Rightarrow t_2$  と同様な方法でこの間の各機器の時間経過にともなう故障発生を判定している。この表の場合F1は時刻  $t_2$  から  $t_6$  の間において故障が発生しており故障状態 ("0") となっている。但し、 $t_2$  開始時点でENへの入力が存在しており、EN、P1がこの間故障しないので、時刻

t6においてP1の出力が存在し続ける。これがループ運転が実現した状態である。つまり、P1の出力の存在をもってループ運転の存在と判断できる。

非ループ運転の存在は、F1の機器状態とENの機器状態のANDが"1"の時となる。システム運転の存在は、ループ運転か非ループ運転のどちらかあるいは両方が存在するときとなる。

表5は、各機器に確率的に発生する故障の組み合わせのうちたまたま発生した一つの状況を表している。このような状況を多数回評価・集積し、システム運転状態が"1"となる回数を全回数で割ることにより時刻 t6 におけるシステムの動作確率が得られる。

ここで取り上げたモデルのシステム運転状態事象は(49)式の形と得られているが、この式をF1, EN, P1で置き換えて表現すると、

$$X = F1(t_2)EN(t_6)P1(t_6) + F1(t_6)EN(t_6) \quad (136)$$

となる。発生確率に変換すると、

$$\Pr(X) = \Pr(F1(t_2)EN(t_6)P1(t_6)) + \Pr(F1(t_6)EN(t_6)) - \Pr(F1(t_6)EN(t_6)P1(t_6)) \\ = 0.51998 + 0.42206 - 0.348578 = 0.59346 \quad (137)$$

の値が得られる。一方、表5で示したシミュレーション方法による結果では 0.5976 (5000回試行の場合)と得られており良い一致が見られた。

以上説明した方法を図13のサンプルシステムに適用しモデル化しシミュレーションを実施した。モデル化においては、各機器の2回目の起動機会における起動が1回目の起動失敗の条件下で行なわれること、F2が時刻 t4 で供給開始された時、第(29)式第2項の効果が現れる点を注意した。

シミュレーション結果の一例を図14に示す。試行回数が増えるに従い(134)式により算出された値に近づいていく様子がわかる。

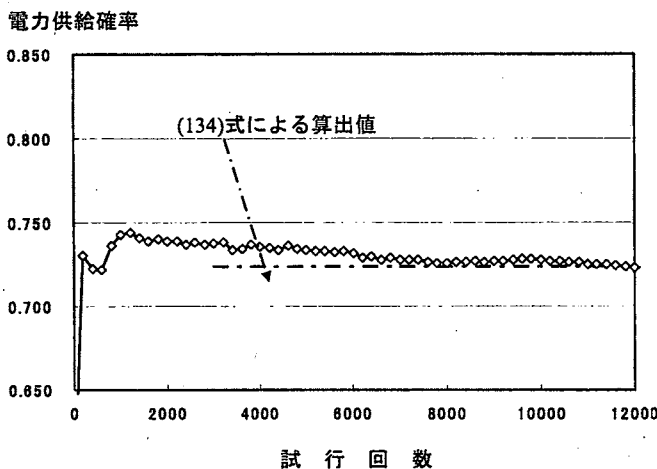


図14 サンプルシステムのシミュレーション結果

このシミュレーションにおいては(134)式の情報は全く用いておらず、各機器の支援関係と起動条件のみを用いている。両方法の結果の良好な一致より、相互に妥当な解析を実施していることが確認できたと言える。

## 4 結論

従来、論理ループ構造を含んだシステムの信頼性は厳密には解くことはできず、ブール代数方程式を再帰的代入方法で解く近似的手法で対応されてきた[1]-[5]。しかし、近年著者により未知ブール代数要素を含んだ方程式を厳密に解く方法[7]が提案され、限定された条件下においてはシステム解析にとり有効な方法であることが示された。

本論文では、論理ループを含んだシステムの信頼度を一般的な条件下で求める方法を提案している。まず、未知ブール代数要素を含んだブール代数方程式の解法の証明を与え、次に機器を自己支持型(SS-type)と従属型(D-type)に分類し、それぞれの運転状態事象の表現方法を示した。

論理ループの解析には機器の運転状態の時間推移を考慮する必要があることを示し、機器の基本的な接続関係について、起動時刻を考慮した運転状態事象の表現式を導出した。

代表的な論理ループ構造について、ループ運転の形成過程を考慮して運転状態の特徴を明らかにし、それらについても運転状態事象を導出した。

以上の検討をふまえ、論理ループ構造を含んだシステムの解析手順を提案し、これに基づいてサンプルシステムの解析を実施した。具体的な数値を代入して算出した各項の寄与度合い例の検討から、ループ運転相互の支援等、従来注意が払われていなかった運転状態事象からの寄与も無視できない場合があることがわかった。

最後に、サンプルシステムのシミュレーション解析を実施し本提案手法の結果と比較した。両方法による解析結果の良好な一致から、本提案手法により算出された結果の妥当性が確認できたと言える。

本論文で提案した論理ループの解析方法により、論理ループ構造を含んだ各種大規模複雑システムの信頼度が厳密に解ける事となり、既存システムの再評価、効果的・効率的な設計等が可能となった。

## 参考文献

- [1] Coles, G.A. and T.B. Powers (1989) : "Breaking the logic loop to complete the probabilistic risk assessment", *In the Proceeding of PSA'89: international topical meeting on probability, reliability and safety assessment, Pittsburg, PA, April 2-7, 1989, American Nuclear Society, pp. 1155-1160.*
- [2] Matsuoka, T. (2000) : "A method to solve logical loops in the GO-FLOW Methodology", *In the Proceedings of PSAM-V; International conference on probabilistic safety assessment and management, Osaka, Japan, November 27-December 1, pp.1461-1465*
- [3] Yang, J.E., S.H. Han, J.H. Park and Y.H. Jin (1997) : "Analytic method to break logical loops automatically in PSA", *Reliability Engineering and System Safety, Vol.56, pp.101-105.*
- [4] Vaurio, J.K. (2007) : "A recursive method for breaking complex logic loops in Boolean system models", *Reliability Engineering and System Safety, Vol.92, pp.1473-1475.*
- [5] Lim, H.G. and S.C. Jang (2007) : "An analytic solution for a fault tree with circular logics in which the systems are linearly interrelated", *Reliability Engineering and System Safety, Vol. 92, pp.804-807.*
- [6] Even S. (1969): "Sequential Boolean Equations, Appendix; Solution of Boolean Equations," *IEEE Trans. on Computers Vol.C-18, pp.230-240.*
- [7] Matsuoka T. (2009) : "An exact method for solving logical loops in reliability analysis", *Reliability Engineering and System Safety, Vol. 94, pp. 1282-1288.*

(まつおか たけし)



松岡 猛

1968年3月 東京工業大学 理工学部 物理学科卒業,  
1970年3月 東京大学大学院理学系研究科物理学専攻(修士課程)修了,  
1973年3月 東京大学大学院理学系研究科物理学専攻(博士課程)単位取得退学,  
運輸省船舶技術研究所にて原子力船の安全性研究に従事,  
1979-1980年米国 MIT 留学,  
2000年4月 船舶技術研究所部長, 海上技術安全研究所領域長を経て,  
2006年4月 宇都宮大学工学部教授, 現在に至る.  
システム信頼性工学, 安全工学の研究に従事, 工学博士,  
日本学術会議連携会員, 日本信頼性学会, 日本機械学会,  
電子情報通信学会, 日本原子力学会, 日本工学アカデミー, ANS 他会員

投稿受付: 2009年7月7日  
改訂: 2010年1月12日  
再改訂: 2010年4月5日